

北科數學會考非官方詳解

作者

- 黃漢軒
 - 109 臺北科技大學 資訊工程系
 - sigtunatw@gmail.com
- 羅昇宇
 - 109 臺北科技大學 化學工程與生物科技系
 - qoo18105@gmail.com

特別銘謝

特別銘謝北科數學會考出題老師，為了提升學生的數學能力而辦立了這場考試。

100年第1次北科入學數學會考

100-01-01

Statement

已知 $f(x)$ 為一實係數多項式，且 $f(\frac{3}{2}) = 27$ ， $f(-\frac{5}{3}) = 8$ 。

若 $f(x)$ 除以 $(6x^2 + x - 15)$ 的餘式為 $ax + b$ ，則 $b - a = ?$

- (A) 4
- (B) 8
- (C) 12
- (D) 16
- (E) 20

Solution

可以把式子轉成

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)(6x^2 + x - 15) + ax + b \\ &= g(x)(3x + 5)(2x - 3) + ax + b \end{aligned}$$

代入 $x = \frac{3}{2}$ ，得到 $\frac{3}{2}a + b = 27$

代入 $x = -\frac{5}{3}$ ，得到 $-\frac{5}{3}a + b = 8$

解聯立之後得到 $(a, b) = (6, 18)$

因此 $b - a = 12$ ，故選(C)

100-01-02

Statement

若 α, β 為方程式 $x - \frac{3}{x} + 1 = 0$ 的兩根，則 $(\frac{2}{\alpha} + 5)(\frac{2}{\beta} + 5) = ?$

- (A) 9
- (B) 15
- (C) 21
- (D) 27
- (E) 33

100-01-04

Statement

若 $\frac{2x^2 - x + 4}{x^4 + 4x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$ ，則 $A + B + C + D = ?$

- (A) $\frac{1}{2}$
 (B) 2
 (C) 3
 (D) $\frac{7}{2}$
 (E) 33

Solution

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^4 + 4x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$$

$$2x^2 - x + 4 = A(x^3 + 4x) + B(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2)$$

$$= Ax^3 + 4Ax + Bx^2 + 4B + Cx^3 + Dx^2$$

$$= (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + 4Ax + 4B$$

可知

$$A + C = 0$$

$$B + D = 2$$

$$A = -\frac{1}{4}$$

$$B = 1$$

因此 $C = \frac{1}{4}$ ， $D = 1$ 。

因此 $A + B + C + D = 2$

故選(B)

100-01-05

Statement

$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} \leq -1$ 之解為何？

- (A) $1 \leq x < 2$
 (B) $1 < x \leq 2$
 (C) $1 < x < 2$
 (D) $x \geq 2$ 或 $x < 1$
 (E) $x > 2$ 或 $x < 1$

Solution

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} &\leq -1 \\ \Rightarrow \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} + 1 &\leq 0 \\ \Rightarrow \frac{2x^2 - 10x + 14}{x^2 - 3x + 2} &\leq 0 \\ \Rightarrow \frac{2(x^2 - 5x + 7)}{(x-1)(x-2)} &\leq 0\end{aligned}$$

故我們考慮

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 14 \leq 0 \\ (x-1)(x-2) > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$
$$\begin{cases} x^2 - 10x + 14 \geq 0 \\ (x-1)(x-2) < 0 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 2$$

因此 $1 < x < 2$ 時， $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} \leq -1$ ，故選(C)

100-01-06

Statement

若 a, b 均為實數且 $ax^2 + bx - 10 < 0$ 之解為 $\frac{-5}{2} < x < \frac{4}{3}$ ，則 $a + b = ?$

- (A) 5
- (B) $\frac{11}{2}$
- (C) 6
- (D) $\frac{13}{2}$
- (E) 7

Solution

可以根據結果列出式子，得：

$$\begin{aligned}(x + \frac{5}{2})(x - \frac{4}{3}) &< 0 \\ \Rightarrow x^2 - \frac{4x}{3} + \frac{5x}{2} + \frac{-20}{6} &< 0 \\ \Rightarrow 6x^2 - 8x + 15x - 20 &< 0 \\ \Rightarrow 6x^2 + 7x - 20 &< 0\end{aligned}$$

兩邊同除2，得 $3x^2 + \frac{7}{2}x - 10 < 0$

$$a = 3, b = \frac{7}{2}, a + b = \frac{13}{2}$$

100-01-07

Statement

若直線 $12x - 5y = 21$ 與兩直線 $x = \frac{23}{39}$ 、 $x = \frac{16}{13}$ 分別交於 A 、 B 兩點，則線段長 $\overline{AB} = ?$

- (A) $\frac{6}{5}$
 (B) $\frac{5}{4}$
 (C) $\frac{5}{3}$
 (D) $\frac{13}{5}$
 (E) $\frac{25}{7}$

Solution

已知 $12x - 5y = 21$ ，則斜率為 $\frac{12}{5}$

$$\Delta x = \frac{16}{13} - \frac{23}{39} = \frac{25}{39}$$

$$y = mx + b, \text{ 則 } 0 = \frac{12}{5} \left(\frac{16}{13} - \frac{23}{39} \right) + b, \text{ 得到 } b = \frac{60}{39} = \Delta y$$

因此距離為 $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\frac{25}{39}\right)^2 + \left(\frac{60}{39}\right)^2} = \frac{5}{3}$ ，故選(C)

100-01-08

Statement

設兩向量 \vec{a} 、 \vec{b} 的夾角為 θ ，且 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ， $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$ ， $|\vec{a} - \vec{b}| = 3$ ，則 $\cos \theta = ?$

- (A) $\frac{7}{25}$
 (B) $\frac{5}{13}$
 (C) $\frac{3}{5}$
 (D) $\frac{4}{5}$
 (E) $\frac{5}{6}$

Solution

可以考慮成

$$\cos \theta = \frac{|a|^2 + |b|^2 - |a - b|^2}{2 \times |a| \times |b|}$$

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{|a|^2 + |b|^2 - |a + b|^2}{2 \times |a| \times |b|} = -\cos \theta$$

$$\text{因此, } \frac{|a|^2 + |b|^2 - |a - b|^2}{2 \times |a| \times |b|} = \frac{-|a|^2 - |b|^2 + |a + b|^2}{2 \times |a| \times |b|}$$

$$|a|^2 + |b|^2 - 9 = -|a|^2 - |b|^2 + 16$$

$$\text{設 } x = |a| = |b|, \text{ 故 } 2x^2 - 9 = -2x^2 + 16, \text{ 得到 } x = \frac{5}{2} = |a| = |b|$$

$$\text{代入 } \cos \theta, \text{ 得到 } \frac{\frac{25}{4} + \frac{25}{4} - 9}{2 \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2}} = \frac{\frac{25}{2} - 9}{\frac{25}{2}} = \frac{7}{25}$$

故選(A)

100-01-09

Statement

設兩向量 \vec{a} 、 \vec{b} 的夾角為 θ ，且 $|\vec{a}| = 7$ 、 $|\vec{b}| = 5$ ， $\tan \theta = -\frac{3}{4}$ ，則 $(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b}) = ?$

- (A) -25
- (B) -5
- (C) 0
- (D) 44
- (E) 51

Solution

$$(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 - 3(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) - 3|\vec{b}|^2$$

$$\text{已知 } \tan \theta = -\frac{3}{4}, \text{ 則 } \cos \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\text{因此 } \vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b| \cos \theta = 7 \times 5 \times -\frac{4}{5} = -28$$

$$\text{因此 } (\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b}) = 98 + 28 - 75 = 51$$

故選(E)。

100-01-10

Statement

橢圓以(2, 2)與(6, 2)為兩焦點，且與直線 $x + 1 = 0$ 相切，則橢圓短軸半長為何？

- (A) 4
- (B) $\sqrt{21}$
- (C) $\sqrt{23}$
- (D) $\sqrt{29}$
- (E) 6

Solution

將題目簡化為求 b 的長度為何

橢圓中點為兩焦點座標之中點，也就是 $(\frac{2+6}{2}, \frac{2+2}{2}) = (4, 2)$

焦距 c 為焦點與橢圓中點之距離，因此可知 $c = 2$

已知與直線 $x + 1 = 0$ 相切，因此橢圓左右一端會與 $x + 1 = 0$ 相切，因此其中一端為 $(-1, 2)$

故長軸 a 為橢圓長軸端點與中心之距離，可知 $a = 5$

因此 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$

故選(B)。

100-01-11

Statement

設拋物線 $y = 2x - \frac{1}{2}x^2$ 的焦點座標為 (a, b) ，則 $ab = ?$

- (A) 3
- (B) 3.5
- (C) 4
- (D) 4.5
- (E) 5

Solution

$$y = 2x - \frac{1}{2}x^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(4x - x^2)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(-4 + 4x - x^2) + 2$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$$

$$\Rightarrow -2(y - 2) = (x - 2)^2$$

因此可以知道頂點座標為 $(2, 2)$ ， $c = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

因此焦點為 $(2, 2 + \frac{-1}{2}) = (2, \frac{3}{2})$

故 $a = 2, b = \frac{3}{2}$ ，得到 $ab = 3$ ，故選(A)。

100-01-12

Statement

雙曲線 $xy - 3x + 4y = 0$ 兩頂點的距離為何？

- (A) $2\sqrt{3}$
- (B) 4
- (C) $2\sqrt{6}$
- (D) $4\sqrt{3}$
- (E) $4\sqrt{6}$

Solution

$$xy - 3x + 4y = 0 \Rightarrow (x + 4)(y - 3) = -12$$

考慮通過頂點的線為 $y = -x + b$ ，代入必定通過的點 $(-4, 3)$ 得到 $b = -1$

因此 $y = -x - 1$ 會通過直角雙曲線的兩個頂點。

與原式解聯立

$$x(-x - 1) - 3x + 4(-x - 1) = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 4 = 0$$

利用公式解得到 x 的點，也就是 $x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 1 \times 4}}{2} = -4 \pm 2\sqrt{3}$

當 $x = -4 + 2\sqrt{3}$ 時， $y = 2\sqrt{3} - 3$

當 $x = -4 - 2\sqrt{3}$ 時， $y = -3 - 2\sqrt{3}$

兩點距離為 $\sqrt{(-4 + 2\sqrt{3} - (-4 - 2\sqrt{3}))^2 + (2\sqrt{3} - 3 - (-3 - 2\sqrt{3}))^2} = \sqrt{48 + 48} = 4\sqrt{6}$ ，故選(E)

100-01-13

Statement

若 $\log_2(3 - x^2) = 1 + \log_2 x$ ，則 $x = ?$

- (A) -3
- (B) -3或1
- (C) 1
- (D) 2
- (E) 3

Solution

$$\log_2(3 - x^2) = 1 + \log_2 x$$

$$\Rightarrow \log_2(3 - x^2) - \log_2 x = 1$$

$$\Rightarrow \log_2\left(\frac{3 - x^2}{x}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{3 - x^2}{x} = 2$$

$$\Rightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1, x = -3$$

驗根可知 $\log_2 x$ 無法放入 -3 ，因為 \log 的定義域為正整數之集合，故 $x = -3$ 不合。

因此 $x = 1$ ，故選(C)

100-01-14

Statement

若 $f(x) = \frac{1+2^x}{1-2^x}$ ，且 $f(a) = 3$ ， $f(b) = 5$ ，則 $f(a+b) = ?$

(A) $\frac{5}{3}$

(B) 2

(C) 6

(D) 8

(E) 15

Solution

令 $t = 2^x$ ，則 $f(x) = \frac{1+t}{1-t}$

考慮 $f(a) = 3$

$$\frac{1+t}{1-t} = 3$$

$$\Rightarrow 1+t = 3-3t$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

因此 $2^a = \frac{1}{2}$ ，得到 $a = -1$

考慮 $f(b) = 5$

$$\frac{1+t}{1-t} = 5$$

$$\Rightarrow 1+t = 5-5t$$

$$\Rightarrow t = \frac{2}{3}$$

$2^b = \frac{2}{3}$ ，則 $b = 1 - \log_2 3$

故 $f(a+b) = f(-\log_2 3) = f(\log_2 \frac{1}{3}) = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{4}{2} = 2$ ，故選(B)

100-01-15

Statement

求 $\log_2(\sqrt{12+2^{\frac{7}{2}}} + \sqrt{12-2^{\frac{7}{2}}}) = ?$

- (A) $\frac{1}{2}$
- (B) $\frac{3}{2}$
- (C) 2
- (D) $\frac{5}{2}$
- (E) 4

Solution

$$\begin{aligned}\log_2(\sqrt{12+2^{\frac{7}{2}}} + \sqrt{12-2^{\frac{7}{2}}}) &= \log_2(\sqrt{12+8\sqrt{2}} + \sqrt{12-8\sqrt{2}}) = \log_2(\sqrt{8+8\sqrt{2}+4} + \sqrt{8-8\sqrt{2}+4}) \\ &= \log_2(\sqrt{(2+2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2-2\sqrt{2})^2}) = \log_2(4\sqrt{2}) = \frac{5}{2}, \text{ 故選(D)}\end{aligned}$$

100-01-16

Statement

設 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，且 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ ，則 $\sin \theta + \cos \theta = ?$

- (A) -1
- (B) $-\frac{1}{2}$
- (C) $\frac{1}{2}$
- (D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- (E) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

Solution

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\text{故 } \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8}$$

$$\text{則 } \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{(\sin \theta + \cos \theta)^2} = \sqrt{\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta}$$

$$= \sqrt{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} = \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}, \text{ 故選(E)}$$

100-01-17

Statement

下列何者錯誤？

- (A) 若 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ ，則 $\sin x < \cos x < \cot x$
- (B) 若 $\pi < x < \frac{5\pi}{4}$ ，則 $\sec x < \csc x < \cot x$
- (C) 若 $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ ，則 $\cos x < \sin x < \tan x$
- (D) 若 $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$ ，則 $\sin x_1 > \sin x_2$
- (E) 若 $\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \pi$ ，則 $\cos x_1 > \cos x_2$

Solution

若 $\pi < x < \frac{5\pi}{4}$ ，則 $\sin \theta < \cos \theta < \tan \theta$

故 $\csc \theta < \sec \theta < \cot \theta$ ，故選(B)

100-01-18

Statement

若 $mx + 3y + 1 = 0$ 與 $x + (m - 2)y + m = 0$ 之交點在第二象限內，則 m 之範圍為何？

- (A) $0 < m < 1$
- (B) $0 < m < 2$
- (C) $0 < m < 3$
- (D) $1 < m < 3$
- (E) $1 < m < 4$

Solution

用一二式來解聯立，可以寫出交點參數式

$$\begin{cases} x = \frac{2m + 2}{(m - 3)(m + 1)} \\ y = \frac{m^2 - 1}{(-m + 3)(m + 1)} \end{cases}$$

考慮到 $y > 0, x < 0$ 的情況

得到 $((m < -1) \cup (-1 < m < 3)) \cap (1 < m < 3) \Rightarrow 1 < m < 3$

得到 $1 < m < 3$ ，故選(D)

100-01-19

Statement

若點 (a, b) 在直線 $2x + 3y = 1$ 上移動，則直線 $ax + by = 3$ 恆過哪一點？

- (A) (3, 4)
- (B) (4, 5)
- (C) (5, 7)
- (D) (5, 8)
- (E) (6, 9)

Solution

考慮 $x = 5$ 時 $y = -3$

考慮 $x = -4$ 時 $y = 3$

由於 a, b 依照一定比例變換，因此只有直線上的斜率變換。

找到兩條線的交點即為恆過的點。

因此我們考慮 $5x - 3y = 3$ 與 $-4x + 3y = 3$ 的交點，得到 $(x, y) = (6, 9)$ ，故選(E)

100-01-20

Statement

已知 $A(3, -5)$ ， $B(-7, 4)$ ，且點 P 介於 A 、 B 之間，又 $\overline{AB} : \overline{BP} = 7 : 4$ ，若 P 之座標為 (a, b) ，則 $7a + 21b = ?$

- (A) - 33
- (B) - 32
- (C) - 31
- (D) - 30
- (E) - 29

Solution

$$\overline{AB} : \overline{BP} = 7 : 4 \Rightarrow \overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 4$$

利用內分點公式。

$$P = \left(\frac{4 \times 3 + 3 \times (-7)}{7}, \frac{4 \times (-5) + 3 \times 4}{7} \right) = \left(\frac{-9}{7}, \frac{-8}{7} \right)$$

則 $7a + 21b = (-9) + (-8) \times 3 = -33$ ，故選(A)

100年第2次北科入學數學會考

100-02-01

Statement

若 α, β 為方程式 $x^2 + 12x + 9 = 0$ 的兩根，則 $(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 = ?$

(A) -18

(B) -6

(C) 6

(D) 12

(E) 18

Solution

我們可以依照偉達定理(根與係數)的概念來寫這一題。

令一二次多項式 $ax^2 + bx + c$ ，存在兩根 α 與 β 。

那麼 $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ ，且 $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

因此，我們可以把欲求的式子展開，得：

$$\sqrt{\alpha}^2 - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}^2$$

$$\Rightarrow \alpha - 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta$$

根據偉達定理我們可以求得

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-12}{1} = -12$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{9}{1} = 9$$

注意一下 $\alpha + \beta = -12$ ， $\alpha\beta = 9$

若兩根一正一負那麼 $\alpha\beta < 0$ ，若兩根都是正的那麼 $a + b > 0$

因此剩下唯一的兩根都是負的才能使偉達定理成立。

$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$ 會存在複數，相乘後可以得到 $-\sqrt{\alpha\beta}$ 。

因此帶回欲求之式子：

$$-12 - 2 \times -\sqrt{9} = -12 + 6 = -6$$

100-02-02

Statement

若 $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ 與 $2x^3 + x^2 - 7x - 6$ 的最高公因式為 $x^2 + bx + c$ ，則 $b + 2c = ?$

- (A) -5
- (B) -3
- (C) 0
- (D) 5
- (E) 7

Solution

第一式的因式 $ax + b$ 的 a 一定會是1的因素(因為最大項係數等於1)，且 b 一定會是2的因數(因為最小項的係數等於2)，第二式亦同。

因此我們可以對第一式做因式分解，得到 $(x + 1)(x - 2)(x^2 + 1)$
接著我們以相同方式對第二式做因式分解，得到 $(x + 1)(x - 2)(2x + 3)$

可以觀察到最大公因式即為 $(x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$
比較係數後得到 $b = -1, c = -2$

則 $b + 2c = -1 + 2 \times -2 = -5$ 。

100-02-03

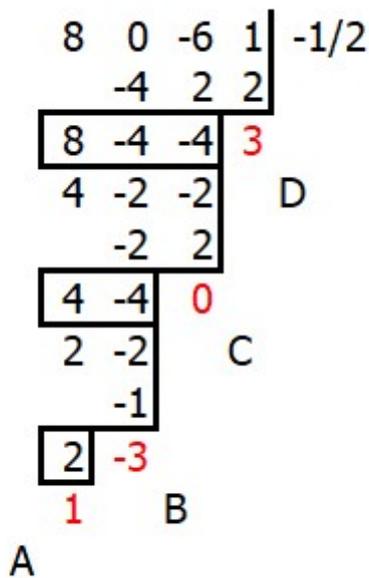
Statement

若 $\frac{8x^3 - 6x + 1}{(2x + 1)^4} = \frac{a}{(2x + 1)} + \frac{b}{(2x + 1)^2} + \frac{c}{(2x + 1)^3} + \frac{d}{(2x + 1)^4}$ ，則 $2a + b - c + d = ?$

- (A) -2
- (B) -1
- (C) 0
- (D) 1
- (E) 2

Solution

我們可以使用綜合除法，將 $2x + 1$ 改寫成 $x + \frac{1}{2}$ ，然後再對除出來的係數除以2。



因此 $a = 1, b = -3, c = 0, d = 3$ 。

$2a + b - c + d = 1 \times 2 + (-3) - 0 + 3 = 2$ 。

100-02-04

Statement

$x^2 - 4x + 2 \leq |x - 2|$ 之解為何？

- (A) $1 \leq x \leq 4$
- (B) $2 \leq x \leq 4$
- (C) $0 \leq x \leq 2$
- (D) $0 \leq x \leq 4$**
- (E) $0 \leq x \leq 3$

Solution

1. 考慮 $x^2 - 4x + 2 \leq x - 2$:

移項， $x^2 - 4x + 2 - x + 2 \leq 0$

整理， $x^2 - 5x + 4 \leq 0$

那麼我們可以將其因式分解，得 $(x - 4)(x - 1) \leq 0$ ，並且可以得到 $1 \leq x \leq 4$ 。

2. 考慮 $x^2 - 4x + 2 \leq -x + 2$:

移項， $x^2 - 4x + 2 + x - 2 \leq 0$

整理， $x^2 - 3x \leq 0$

那麼我們可以將其因式分解，得 $x(x - 3) \leq 0$ ，並且可以得到 $0 \leq x \leq 3$

兩者取聯集，得到 $0 \leq x \leq 4$ 。

100-02-05

Statement

$2\log_2 x - \log_x 2 < 1$ 之解為何？

- (A) $x < \frac{-1}{2}$ 或 $0 < x < 1$
- (B) $0 < x < \frac{1}{2}$ 或 $1 < x < 2$
- (C) $x < \frac{-1}{\sqrt{2}}$ 或 $0 < x < 1$
- (D) $x < \frac{-1}{\sqrt{2}}$ 或 $1 < x < 2$
- (E) $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $1 < x < 2$**

Solution

$2\log_2 x - \log_x 2 < 1$

$$\Rightarrow 2\log_2 x - \frac{\log 2}{\log x} < 1$$

$$\Rightarrow 2\log_2 x - \frac{1}{\log_2 x} < 1$$

令 $\log_2 x = t$ ，那麼

$$2t - \frac{1}{t} < 1$$

$$\Rightarrow 2t - \frac{1}{t} - 1 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{2t^2 - t - 1}{t} < 0$$

考慮兩種情況。

1. 若 $t > 0$ 且 $2t^2 - t - 1 < 0$

$$2t^2 - t - 1 < 0 = (2t + 1)(t - 1) < 0 = \frac{-1}{2} < t < 1$$

與 $t > 0$ 取交集得到 $0 < t < 1$ 。

2. 若 $t < 0$ 且 $2t^2 - t - 1 > 0$

$$2t^2 - t - 1 > 0 = (2t + 1)(t - 1) > 0 = t < \frac{-1}{2} \text{ 或 } t > 1$$

與 $t < 0$ 取交集得到 $t < \frac{-1}{2}$ 。

對這兩種考慮取聯集，得到 $t < \frac{-1}{2}$ 或 $0 < t < 1$ 。

還原，得到 $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $1 < x < 2$ 。

100-02-06

Statement

已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 37$ ， $\overline{BC} = 53$ ， $\overline{AC} = 89$ ，則下列各內積中，何者為最大？

(A) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

(B) $\vec{BC} \cdot \vec{BA}$

(C) $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$

(D) $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$

(E) $\vec{BC} \cdot \vec{CA}$

Solution

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 37 \times 89 \times \frac{37^2 + 89^2 - 53^2}{2 \times 37 \times 89}$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{BA} = 53 \times 37 \times \frac{53^2 + 37^2 - 89^2}{2 \times 53 \times 37}$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 89 \times 37 \times \frac{89^2 + 53^2 - 37^2}{2 \times 89 \times 53}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} < 0$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{CA} < 0$$

故問題化簡成比較以下三者之大小：

$$37^2 + 89^2 - 53^2。$$

$$53^2 + 37^2 - 89^2$$

$$89^2 + 53^2 - 37^2$$

顯然是第三者較大，故選(C)

100-02-07

Statement

已知向量 $\vec{AB} = (-31, 29)$ ， $\vec{AC} = (23, -11)$ ，則下列向量長中，何者為最大？

- (A) $|\vec{AB}|$
- (B) $|\vec{BC}|$
- (C) $|\vec{AB} + \vec{BC}|$
- (D) $|\vec{AB} + \vec{AC}|$
- (E) $|\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}|$

Solution

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$$

$$\vec{BA} = (31, -29)$$

$$\vec{BC} = (31, -29) + (23, -11) = (54, -40)$$

$$\vec{CA} = (-23, 11)$$

考慮向量長的公式，當存在一向量 $\vec{L} = (A, B)$ ， \vec{L} 的向量長為 $|\vec{L}| = \sqrt{A^2 + B^2}$ 因此若 $|A| + |B|$ 越大，那麼向量長越大。

考慮選項A： $| -31 | + | 29 | = 60$

考慮選項B： $| 54 | + | -40 | = 94$

考慮選項C： $\vec{AB} + \vec{BC} = (-31, 29) + (54, -40) = (23, -11)$ ， $| 23 | + | -11 | = 34$

考慮選項D： $\vec{AB} + \vec{AC} = (-31, 29) + (23, -11) = (-8, 18)$ ， $| -8 | + | 18 | = 26$

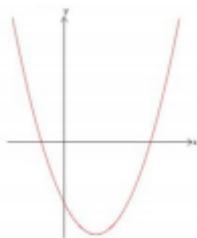
考慮選項E： $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = (-31, 29) + (54, -40) + (-23, 11) = (0, 0)$ ， $| 0 | + | 0 | = 0$

因此，故選B。

100-02-08

Statement

設 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形如下，則下列各式中，何者為負值？



- (A) abc
- (B) $b^2 - 4ac$
- (C) $c^2 - 4ab$
- (D) $b + \sqrt{b^2 - 4ac}$
- (E) $b - \sqrt{b^2 - 4ac}$

Solution

因為開口向上，所以 $a > 0$ 。

觀察 $x = 0$ ，可以發現對應到的 $y < 0$ ，因此 $c < 0$

觀察一下對稱軸， $\frac{-b}{2a} > 0$ ，因此 $b < 0$

因此 $abc > 0$ ， $b^2 - 4ac > 0$ 因為有實數解。

$c^2 - 4ab > 0$ 因為 $ab < 0$ 。

而 $b + \sqrt{b^2 - 4ac}$ 必為正因為可以從圖中觀察到這個根是正數，另一根是負數因此 $b - \sqrt{b^2 - 4ac}$ 小於0，故選E。

100-02-09

Statement

已知 $4x^2 + y^2 - 4x + 8y = 8$ ，則 x 的最大值為何？

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

Solution

這是一個橢圓，可以用配方法來找短邊或者長邊，加上中心就是最大的 x 了。

$$4x^2 - 4x + y^2 + 8y = 8$$

$$4(x^2 - x) + y^2 + 8y = 8$$

$$4\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + y^2 + 8y + 16 = 8 + 16 + 1$$

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 4)^2 = 25$$

$$\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{25}{4}} + \frac{(y + 4)^2}{25} = 1$$

由此可知這個橢圓的短邊平行 x 軸

$$a = \sqrt{25} = 5, b = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

中心可從式子得知， $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, -4\right)$

因此，加上 x 的部份得到 $\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$

100-02-10

Statement

拋物線 $y = 4 - 2x - x^2$ 與 x 軸兩交點的距離為何？

- (A) 2
- (B) 3
- (C) $2\sqrt{5}$
- (D) 6
- (E) 8

Solution

將 y 等於 0，求出 x 。

$$-x^2 - 2x + 4 = 0$$

先確定 $b^2 - 4ac$ 是否大於 0。

$$(-2)^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 4 + 16 = 20$$

$$\text{因此兩根為 } \frac{2 \pm \sqrt{20}}{-2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{-2}$$

$$\frac{2 + \sqrt{5}}{-2} - \frac{2 - \sqrt{5}}{-2} = 2\sqrt{5}$$

100-02-11

Statement

設雙曲線 $x^2 - y^2 = x + 2y$ 兩漸進的夾角為 θ ，則 $\sin \frac{\theta}{2} = ?$

- (A) 0
- (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (D) $\frac{2}{\sqrt{5}}$
- (E) 1

Solution

配方雙曲線得到標準式。

$$x^2 - x - y^2 - 2y = 0 \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} - y^2 - 2y + 1 = \frac{5}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - (y - 1)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\frac{4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{5} - \frac{4(y - 1)^2}{5} = 1$$

求漸進線，令等號右邊為 0

$$\frac{4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{5} = \frac{4(y - 1)^2}{5}$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 = (y - 1)^2$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 - (y - 1)^2 = 0$$

$$(x - \frac{1}{2} - (y - 1))(x - \frac{1}{2} + (y - 1)) = 0$$

$$(x - y + \frac{1}{2})(x + y + \frac{3}{2}) = 0$$

第一條線 $(x - y + \frac{1}{2})$ 可求斜率 $m = 1$

第二條線 $(x + y + \frac{3}{2})$ 可求斜率 $m = -1$

因此，這兩條線垂直($m_1 \times m_2 = -1$)，夾角為 90°

$$\text{因此} \sin \frac{90^\circ}{2} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

100-02-12

Statement

不等式 $\frac{3 \cdot 2^x - 18 \cdot 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} \leq 2$ 之解為何？

(A) $-1 \leq x \leq 1$

(B) $0 < x \leq 1$

(C) $1 \leq x \leq 2$

(D) $0 < x \leq 2$

(E) $1 \leq x \leq 4$

Solution

將分子分母上下同乘 2^x 。

$$\frac{3 \cdot 2^x - 18 \cdot 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} \Rightarrow \frac{3 \cdot 2^{2x} - 18}{2^{2x} - 1} \leq 2$$

移項。

$$\frac{3 \cdot 2^{2x} - 18}{2^{2x} - 1} - 2 \leq 0$$

$$\frac{3 \cdot 2^{2x} - 18 - 2(2^{2x} - 1)}{2^{2x} - 1} \leq 0$$

$$\frac{3 \cdot 2^{2x} - 18 - 2 \cdot 2^{2x} + 2}{2^{2x} - 1} \leq 0$$

$$\frac{2^{2x} - 16}{2^{2x} - 1} \leq 0$$

令 $t = 2^{2x}$

$$\frac{t - 16}{t - 1} \leq 0$$

考慮以下兩點：

$$1. t - 16 \geq 0, t - 1 < 0$$

$t \geq 16, t < 1$ ，這兩個不等式沒有任何交集，因此 $t \in \emptyset$

$$2. t - 16 \leq 0, t - 1 > 0$$

$t \leq 16, t > 1$ ，這兩個不等式的交集為 $1 < t \leq 16$

將以上考慮的兩點做聯集，得到 $1 < t \leq 16$

還原 t 得到 $1 < 2^{2x} \leq 16$ ，因此 $0 < x \leq 2$

100-02-13

Statement

方程式 $10 \cdot x^{2 \log x} = x^3$ 之所有實根的平方和為何？

(A) 100

(B) 101

(C) 110

(D) 111

(E) 121

Solution

等號兩邊同除 $x^{2 \log x}$

$$10 = x^{3-2 \log x}$$

$$1 = (3 - 2 \log x) \times \log(|x|)$$

因為要求實根，因此可以限定 $x > 0$ ，所以 $(3 - 2 \log x) \times \log(x)$

$$\text{令 } t = \log x$$

$$1 = (3 - 2t) \times t \Rightarrow -2t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$\text{因式分解得到 } (-2t + 1)(t - 1) = 0$$

$$\text{可以解出 } t = \frac{1}{2} \text{ 或 } t = 1$$

還原 t ，可以得到 $\log x = \sqrt{10}$ 或 $\log x = 10$

$$\text{兩根的平方和為 } \sqrt{10}^2 + 10^2 = 110$$

100-02-14

Statement

若 $f(x) = \log_2(x^3 + x^2 - 7x + 5)$ ，則 $f(1 + \sqrt{2}) = ?$

- (A) 1
 (B) 2
 (C) 3
 (D) 4
 (E) 5

Solution

觀察一下，可以嘗試把 $x^3 + x^2 - 7x + 5$ 化簡成 $c(x - 1)^2 + b(x - 1) + a \dots$

這部分可以用綜合除法做到。

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & -7 & 5 & 1 \\
 & & 1 & 2 & -5 & \\
 \hline
 & 1 & 2 & -5 & & 0 \\
 & & 1 & 3 & & d \\
 \hline
 & 1 & 3 & -2 & & \\
 & & 1 & & & c \\
 \hline
 & 1 & 4 & & & \\
 \hline
 a & & & & & b
 \end{array}$$

因此可得 $(x - 1)^3 + 4(x - 1)^2 - 2(x - 1)$ 。

把 $f(1 + \sqrt{2})$ 帶進去，得：

$$\log_2((\sqrt{2})^3 + 4(\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2})) = \log_2(2\sqrt{2} + 8 - 2\sqrt{2}) = \log_2 8 = 3$$

100-02-15

Statement

設 $\cos \theta + \cos^2 \theta = 1$ ，則 $\sin^2 \theta + \sin^4 \theta = ?$

- (A) $\frac{1}{4}$
 (B) $\frac{1}{3}$
 (C) $\frac{1}{2}$
 (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (E) 1

Solution

$$\cos^2 \theta = 1 - \cos \theta$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - (1 - \cos \theta) = \cos \theta$$

$$\sin^4 \theta = (\sin^2 \theta)^2 = \cos^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta + \sin^4 \theta = \cos \theta + \cos^2 \theta = 1$$

100-02-16

Statement

設 $\tan 100^\circ = k$ ，則 $\sin 80^\circ = ?$

(A) $\frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}$

(B) $\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{1+k^2}}$

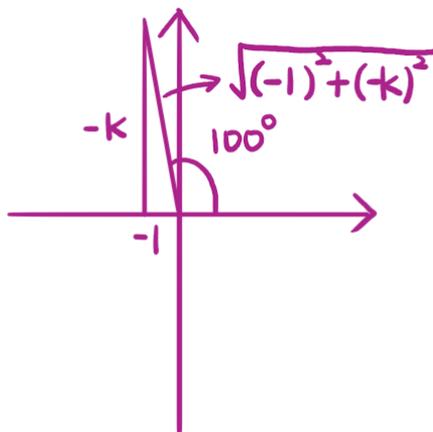
(C) $\frac{-1}{\sqrt{1+k^2}}$

(D) $\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$

(E) $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$

Solution

畫個圖



看圖可以觀察到， $\sin 100^\circ = \sin 80^\circ = \frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}$

100-02-17

Statement

設 $a = \sec 434^\circ$ ， $b = \sin 100^\circ$ ， $c = \cos 260^\circ$ ， $d = \cot 28^\circ$ ， $e = \csc 155^\circ$

則下列何者正確？

(A) $b < c < d < e < a$

(B) $c < b < d < e < a$

(C) $c < b < e < d < a$

(D) $c < b < d < a < e$

(E) $b < c < a < d < e$

Solution

$$a = \sec 434^\circ = \sec 74^\circ = \csc 16^\circ$$

$$b = \sin 100^\circ = \sin 80^\circ$$

$$c = \cos 260^\circ = -\cos 80^\circ$$

$$d = \cot 28^\circ$$

$$e = \csc 155^\circ = \csc 25^\circ$$

因此 $a > e$, $c < b$, 故選B。

100-02-18

Statement

平面上有兩點 $A(1, 2)$, $B(a, b)$, 若直線 \overline{AB} 之垂直平分線為 $x + 2y - 10 = 0$, 則 $a - b = ?$

(A) -1

(B) -2

(C) -3

(D) -4

(E) -5

Solution

垂直平分線, 因此垂直平分線通過 \overline{AB} 的中點 $(\frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2})$ 。

$$\text{帶入垂直平分線得到 } \frac{1+a}{2} + 2 + b - 10 = 0 \Rightarrow 1 + a + 4 + 2b - 20 = 0$$

$$\Rightarrow a + 2b = 15$$

而我們可以求得垂直平分線的斜率, 得到 $m = \frac{-1}{2}$, 因此與其垂直的斜率一定是 $m = \frac{-1}{\frac{-1}{2}} = 2$

因此按照斜率定義, 可以得到 $\frac{2-b}{1-a} = 2$, 整理得到 $2 - b = 2 - 2a \Rightarrow 2a = b$ 。

帶回第一式可以得到 $5a = 15$, $a = 3$, $b = 6$ 。

$$a - b = 3 - 6 = -3$$

100-02-19

Statement

設直線 $bx + ay - ab = 0$ ， $a > 0$ ， $b < 0$ 過點 $(1, 2)$ ，若此直線與二坐標軸相交，圍成一個面積為 2 的三角形，則 $a + 2b = ?$

(A) $-7 - 3\sqrt{3}$

(B) $-6 - 3\sqrt{3}$

(C) $-5 - 3\sqrt{3}$

(D) $-4 - 3\sqrt{3}$

(E) $-3 - 3\sqrt{3}$

Solution

可以推出 x, y 的通式。

$bx + ay = ab$ ，求出 x, y 的截距。

當 $y = 0$ ，那麼 $bx = ab$ ， $x = a$

當 $x = 0$ ，那麼 $ay = ab$ ， $y = b$

已知 $a > 0, b < 0$ 過點 $(1, 2)$ ，此直線與二坐標軸相交，圍成一個面積為 2 的三角形。

因此可以知道 $\frac{1}{2}|a||b| = 2$ ，可知 $ab = -4$ 或者 $ab = 4$ ，但是 $a > 0, b < 0$ ，因此 $ab = 4$ 不合。

已知過點 $(1, 2)$ 且 $ab = -4$ ，因此可以把點帶入得到 $b + 2a = -4$ ，

又 $ab = -4$ 所以 $a = \frac{-4}{b}$ ，所以得到 $b + \frac{-8}{b} = -4$

同乘以 b 可以得到 $b^2 + 4b - 8 = 0$ 。

利用公式解可以解出 $\frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times -8}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{3}}{2}$

那麼可以解出兩根 $-2 + 2\sqrt{3}$ 或者 $-2 - 2\sqrt{3}$ ，其中由於 $b < 0$ ，因此 $-2 + 2\sqrt{3}$ 不合。

帶回求出 a 得到 $a = \frac{-4}{-2 - 2\sqrt{3}} = \frac{-4}{-2(1 + \sqrt{3})}$

化簡得到 $a = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = \frac{2(1 - \sqrt{3})}{-2} = -1(1 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$

因此 $a + 2b = \sqrt{3} - 1 + -4 - 4\sqrt{3} = -5 - 3\sqrt{3}$

Statement

設直線 $3x + y = 1$ 與 $x + 3y = 2$ 之夾角為 θ ，則 $\cos 2\theta = ?$

(A) $\frac{-7}{25}$

(B) $\frac{-6}{25}$

(C) $\frac{-1}{5}$

(D) $\frac{-4}{25}$

(E) $\frac{-3}{25}$

Solution 1

設兩條直線的法向量為 $n_1 = \langle 3, 1 \rangle$ ， $n_2 = \langle 1, 3 \rangle$

$$\text{則} \cos \theta = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1||n_2|} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\text{因此} \sin \theta = \frac{4}{5}$$

$$\text{所以} \cos 2\theta = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = -\frac{7}{25}, \text{ 故選(A)}$$

Solution 2

考慮兩條線的斜率。

$$3x + y = 1, m_1 = \frac{-3}{1} = -3$$

$$x + 3y = 2, m_2 = \frac{-1}{3}$$

兩條線的斜率相減可形成一個夾角，可以視為 \tan 來考慮。

$$\tan(m_1 - m_2) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{-3 - \frac{-1}{3}}{1 + 1} = \frac{\frac{-8}{3}}{2} = \frac{-4}{3}$$

觀察到求出的這個 \tan 夾角是負的，因此這個夾角是大於 90° 的鈍角。

可以依照 $\tan(180^\circ) = 0$ 來求得另一個銳角的夾角。

$$\frac{\frac{-4}{3} + \tan \theta}{1 - \frac{-4}{3} \tan \theta}, \text{ 求得銳角} \tan \theta = \frac{4}{3}$$

由於 $\tan \theta = \frac{4}{3}$ ，那麼這個角度會介於 $45^\circ \sim 90^\circ$

因此乘以兩倍後就會大於 90°

用兩倍角公式求出 $\tan 2\theta = \frac{\frac{4}{3} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{3} \times \frac{4}{3}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{-7}{9}} = \frac{24}{-7}$

由於這個角度介於 $90^\circ \sim 180^\circ$ ， $y > 0$ ，而 $x < 0$ ，也因此 $y = 24$ ， $x = -7$ ， $r = \sqrt{24^2 + (-7)^2} = 25$

因此 $\cos 2\theta = \frac{-7}{25}$ ，故選(A)

101年第1次北科入學數學會考

101-01-01

Statement

設 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ， $\cos \beta = \frac{2}{3}$ 且 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ， $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$ ，求 $\sin(\alpha + \beta) = ?$

- (A) 1
- (B) $\frac{2 - 2\sqrt{10}}{9}$
- (C) $\frac{2 + 2\sqrt{10}}{9}$
- (D) $\frac{4\sqrt{2} - \sqrt{5}}{9}$
- (E) $\frac{2 - 2\sqrt{2}}{3}$

Solution

$$\sin \alpha = \frac{1}{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \text{ 則 } \cos \alpha = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos \beta = \frac{2}{3}, -\frac{\pi}{2} < \beta < 0, \text{ 則 } \sin \beta = \frac{-\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{因此 } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{-2\sqrt{2}}{3} \times \frac{-\sqrt{5}}{3} = \frac{2 + 2\sqrt{10}}{9}, \text{ 故選(C)}$$

101-01-02

Statement

$$\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = ?$$

- (A) $\frac{-3}{4}$
- (B) $\frac{-\sqrt{3}}{4}$
- (C) $\frac{-1}{4}$
- (D) $\frac{1}{4}$
- (E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Solution

$$\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sin 300^\circ = -\sin 60^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) = -\tan 45^\circ = -1$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

因此 $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}(-1)\frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{4}$ ，故選(A)

101-01-03

Statement

設 α, β 為方程式 $x^2 - 2kx + k^2 + k = 0$ 兩負根，且 $\alpha^2 + \beta^2 = 24$ ，則 $k = ?$

- (A) -4
- (B) -3
- (C) -2
- (D) 2
- (E) 4

Solution

利用根與係數，得到 $\alpha\beta = \frac{k^2 + k}{1} = k^2 + k$ ，且 $\alpha + \beta = -\frac{-2k}{1} = 2k$

且由於是兩負根，所以 $\alpha\beta > 0, \alpha + \beta < 0$

$$\text{故 } \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4k^2 - 2(k^2 + k) = 2k^2 - 2k = 24$$

解方程可知 $k = 4$ 或 $k = -3$

驗根，若 $k = 4$ ，則 $\alpha + \beta = 8 > 0$ ，故不合。

因此 $k = -3$ ，故選(B)。

101-01-04

Statement

取適當 k 值，使圓 $x^2 + y^2 - 2kx - 4y + 2k^2 = 6k$ 的面積最大，問此時圓面積為何？

- (A) 10π
- (B) 11π
- (C) 12π
- (D) 13π
- (E) 14π

Solution

對式子做配方法，可以得到 $(x^2 - 2kx + k^2) + (y^2 - 4y + 4) = 6k - 2k^2 + k^2 + 4$

因此 $(x - k)^2 + (y - 2)^2 = -k^2 + 6k + 4$

若圓半徑越大則面積越大，因此我們考慮 $-k^2 + 6k + 4$ 的極值

因此我們對 $(-k^2 + 6k + 4)$ 做配方法，得到 $-(k - 3)^2 + 13$

因此在 $k = 3$ 時，有最大圓半徑 $\sqrt{13}$ ，故圓面積為 $(\sqrt{13})^2\pi = 13\pi$ ，故選(D)

101-01-05

Statement

設 $P(x, y), A(1, -1), B(1, 1), C(4, -1)$ 。滿足 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + 2\overline{PC}^2$ 為最小，則 $x + y = ?$

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

Solution

可列式成 $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 2((x - 4)^2 + (y + 1)^2)$

整理成 $2(x - 1)^2 + 3(y + 1)^2 + 2(x - 4)^2 + (y - 1)^2$

由於各項數字均一定為正，我們可以分開討論

尋找 $2(x - 1)^2 + 2(x - 4)^2$ 與 $3(y + 1)^2 + (y - 1)^2$ 的最小值。

$2(x - 1)^2 + 2(x - 4)^2 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 + 2x^2 - 16x + 32 \Rightarrow 4x^2 - 20x + 34$

對其做配方法，得到 $4(x - \frac{5}{2})^2 + 9$ ，可得 $x = \frac{5}{2}$ 有最小值9。

$3(y + 1)^2 + (y - 1)^2 \Rightarrow 3y^2 + 6y + 3 + y^2 - 2y + 1 \Rightarrow 4y^2 + 4y + 4$

對其做配方法，得到 $4(y + \frac{1}{2})^2 + 3$ ，可得 $y = -\frac{1}{2}$ 有最小值3。

因此 $x + y = \frac{5}{2} + \frac{-1}{2} = 2$ ，故選(B)

101-01-06

Statement

已知 $A(-1, -4), B(3, 5)$ 兩點，又 C 在直線上 $x + y = 0$ 移動，則 $\overline{AC} + \overline{BC}$ 的最小距離為何？

- (A) $\sqrt{97}$
 (B) 10
 (C) $5\sqrt{5}$
 (D) 12
 (E) 14

Solution

若兩點與直線異側，則 C 的取點即為 A 與 B 做一直線與 $x + y = 0$ 之交點，最小距離即為 A 與 B 的距離。

將 A, B 代入直線方程式檢驗

$$A: -1 + -4 = -5 < 0$$

$$B: 3 + 5 = 8 > 0$$

因此最短距離為 A 與 B 的距離，也就是 $\sqrt{(-1-3)^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{16+81} = \sqrt{97}$ ，故選(A)

101-01-07

Statement

四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = \overline{CD} = 5$ ， $\overline{BC} = 2$ ， $\overline{BC} < \overline{AD}$ 且 $\angle ABC = \angle ADC = 60^\circ$ ，則 $\overline{AD} = ?$

- (A) 3
 (B) 5
 (C) 6
 (D) 8
 (E) 9

$$\cos 60^\circ = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{BC}} = \frac{5^2 + 2^2 - \overline{AC}^2}{2 \times 5 \times 2} = \frac{1}{2}, \text{ 可得 } \overline{AC} = \pm\sqrt{19} \text{ (負不合)}$$

$$\text{因此, } \cos \angle ADC = \cos 60^\circ = \frac{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{AC}^2}{2 \times \overline{AD} \times \overline{CD}} = \frac{\overline{AD}^2 + 25 - 19}{10\overline{AD}} = \frac{1}{2}$$

可以得到 $\overline{AD} = 2$ 或 $\overline{AD} = 3$

由於 $\overline{AD} > \overline{BC}$ ，因此 $\overline{AD} = 2$ 不合，故 $\overline{AD} = 3$ ，故選(A)

101-01-08

Statement

點 $(-3, 1)$ 與拋物線 $y^2 - 2y + 5 = 2x$ 的最短距離為何？

- (A) 4
 (B) $\sqrt{17}$
 (C) $3\sqrt{2}$
 (D) 5
 (E) $5\sqrt{5}$

Solution

$$y^2 - 2y + 5 = 2x$$

$$\Rightarrow y^2 - 2y + 1 + 5 - 1 = 2x$$

$$\Rightarrow (y - 1)^2 = 2(x - 2), \text{ 開口向右。}$$

故頂點 $(2, 1)$ 與 $(-3, 1)$ 的距離為5，故選(D)

101-01-09

Statement

設橢圓 $x^2 - 2x + 4y^2 = 3$ 之長軸長為 A ，短軸長為 B ，則 $A + B = ?$

(A) $1 + \sqrt{3}$

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6

Solution

配方法

$$x^2 - 2x + 4y^2 = 3$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + 4y^2 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{(x - 1)^2}{4} + y^2 = 1$$

因此長軸 $A = \sqrt{4} \times 2 = 4$ ，短軸長 $B = \sqrt{1} \times 2 = 2$

因此 $A + B = 4 + 2 = 6$ ，故選(E)

101-01-10

Statement

若 $f(x) = x^3 + ax^2 + 11x + 6$ 與 $g(x) = x^3 + bx^2 + 14x + 8$ 有二次公因式，則 $a + b = ?$

(A) 13

(B) 14

(C) 15

(D) 16

(E) 17

Solution

考慮 $f(x)$ 可能的因式： $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)(x-6)(x+6)$

考慮 $g(x)$ 可能的因式： $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-4)(x+4)(x-8)(x+8)$

可以知道 $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$ 可能共同

因此我們考慮以下四種式子，是否存在兩個相同的 a ，就能當作 $f(x)$ 的因式。

$$a \begin{cases} (x-1) \Rightarrow 1+a+11+6=0 & a=18 \\ (x+1) \Rightarrow -1+a-11+6=0 & a=6 \\ (x-2) \Rightarrow 8+4a+22+6=0 & a=-9 \\ (x+2) \Rightarrow -8+4a-22+6=0 & a=6 \end{cases}$$

因此選 $(x+1)(x+2)$ ，其中 $a=6$ 。

因此 $b = (-1)^3 + b(-1)^2 + 14(-1) + 8$ ，得到 $b = 7$

因此 $a + b = 6 + 7 = 13$ ，故選(A)

101-01-11

Statement

若 $5 \cdot 25^x + 350 \cdot 5^{x-2} = 3$ ，則 $x = ?$

- (A) -2
- (B) -1
- (C) 0
- (D) 1
- (E) 2

Solution

化簡式子，得到 $5 \cdot 5^{2x} + 350 \cdot \frac{1}{25} 5^x = 3$

因此 $5 \cdot 5^{2x} + 14 \cdot 5^x = 3$

令 $t = 5^x$ ，則 $5t^2 + 14t = 3$ ，得到 $t = \frac{1}{5}$ 或 $t = -3$

驗根， $5^x = t = -3$ ，則 x 不存在，故 $t = -3$ 不合。

因此 $5^x = t = \frac{1}{5}$ ， $x = -1$ ，故選(B)

101-01-12

Statement

若 $a = \log 2$ ， $b = \log 3$ ，則 $\log_{12} 180 = ?$

- (A) $1 - a + b$
- (B) $\frac{1 + a^2 + b^2}{a^2 + b}$
- (C) $\frac{a + 2b + 1}{2a + b}$
- (D) $\frac{2a + 2b + 1}{2a + b}$
- (E) $\frac{2a + 2b - 1}{2a + b}$

Solution

可以考慮成 $\frac{\log 180}{\log 12} = \frac{2b + a + 1}{2a + b}$ ，故選(C)

101-01-13

Statement

求曲線 $y = -\sqrt{12 - x(x + 4)}$ 與 x 軸所圍的面積為何？

- (A) 4π
- (B) 5π
- (C) 6π
- (D) 7π
- (E) 8π

Solution

兩邊平方，得到 $y^2 = 12 - x^2 - 4x$ ，配方法得 $(x + 2)^2 + y^2 = 16$ ，中心位於 $(-2, 0)$ ，半徑為4

可知原式原先為一半圓，且在 x 軸底下。

因此可得面積為 $\frac{1}{2}(4)^2\pi = 8\pi$ ，故選(E)

101-01-14

Statement

方程式 $\log(x + 1) + \log(x + 3) - 1 = \log(x + 2)$ 的解為何？

- (A) $5 - \sqrt{26}$
- (B) $3 - \sqrt{26}$
- (C) $1 - \sqrt{26}$
- (D) $3 + \sqrt{26}$
- (E) $5 + \sqrt{26}$

Solution

$$\text{改寫成} \log(x+1) + \log(x+3) - \log 10 = \log(x+2)$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{(x+1)(x+3)}{10}\right) = \log(x+2)$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)(x+3)}{10} = x+2$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 10x + 20$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x - 17 = 0$$

$$\text{公式解，可以得到} \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 1 \times (-17)}}{2} = 3 \pm \sqrt{26}$$

驗根，考慮將 x 代入 $\log(x+1)$ 上

$$3 - \sqrt{26} + 1 = 4 - \sqrt{26} = \sqrt{16} - \sqrt{26} < 0, \text{ 不符合} \log \text{的定義域，故不合。}$$

因此 $x = 3 + \sqrt{26}$ ，故選(D)

101-01-15

Statement

$$\text{設} \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}, \text{ 則} 3A + 2B + C = ?$$

(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 6

(E) 7

Solution

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x + 4 = A(x^2 + 4) + x(Bx + C)$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x + 4 + (A + B)x^2 + Cx + 4A$$

可得 $A + B = 2, C = -1, A = 1$ ，因此 $B = 1$

故 $3A + 2B + C = 3 \times 1 + 2 \times 1 + (-1) = 4$ ，故選(B)

101-01-16

Statement

已知兩平面向量 $\vec{u} = \langle 3, 4 \rangle$ 與 $\vec{v} = \langle x, y \rangle$ ，若 \vec{v} 可使與 \vec{u} 與 \vec{v} 的內積值最大，且 $|\vec{v}| = 2$ ，則 $x = ?$

- (A) $\frac{2}{5}$
 (B) $\frac{3}{5}$
 (C) $\frac{4}{5}$
 (D) 1
 (E) $\frac{6}{5}$

Solution

考慮 $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$ ，則要使內積值最大，可使 $\cos \theta = 1$ ，也就是 $\theta = 0^\circ$ ，兩向量平行。

因此 $x : y = 3 : 4$ ，又 $|\vec{v}| = 2$ ，因此 $\vec{v} = \langle 2 \times \frac{3}{5}, 2 \times \frac{4}{5} \rangle = \langle \frac{6}{5}, \frac{8}{5} \rangle$

因此 $x = \frac{6}{5}$ ，故選(E)

101-01-17

Statement

不等式 $\frac{x-7}{(x-1)^2} \leq -1$

- (A) $3 \leq x$
 (B) $x \leq -2$
 (C) $-2 \leq x < 1$ 或 $1 < x \leq 3$
 (D) $-2 \leq x \leq 3$
 (E) $x \leq -2$ 或 $3 \leq x$

Solution

$$\frac{x-7}{(x-1)^2} \leq -1$$

$$\Rightarrow \frac{x-7}{(x-1)^2} + 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-7+(x-1)^2}{(x-1)^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-x-6}{(x-1)^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{(x-1)^2} \leq 0$$

定義域 $x \neq 1$ ，分母恆正，考慮分子的情況

$$\begin{cases} x-3 \leq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x+2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-2, 3]$$

因此兩者取聯集，得到 $[-2, 1) \cup (1, 3]$ ，故選(C)

101-01-18

Statement

設 x, y 均為正數，且 $3x + y = 10$ ，則 x^3y^2 的最大值為何？

- (A) 108
- (B) 116
- (C) 122
- (D) 128
- (E) 134

Solution

利用算幾不等式，可以考慮成 $\frac{x + x + x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y}{5} \geq \sqrt[5]{x^3 \times \frac{1}{4}y^2}$

$$\Rightarrow 2 \geq \sqrt[5]{\frac{1}{4}x^3y^2}$$

因此 $32 \geq \frac{1}{4}x^3y^2 \Rightarrow 128 \geq x^3y^2$ ，故 x^3y^2 的最大值為128，故選(D)

101-01-19

Statement

設 $A(x, y), B(-1, 4), C(5, -4)$ ，且 $\triangle ABC$ 的重心坐標為 $(2, -1)$ ，則 $x - y = ?$

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

Solution

使用重心公式

$$\frac{x + (-1) + 5}{3} = 2, x = -10$$

$$\frac{y + 4 + (-4)}{3} = -1, y = -3$$

因此 $x = -10, y = -3, x - y = -7$ ，故選(E)

101-01-20

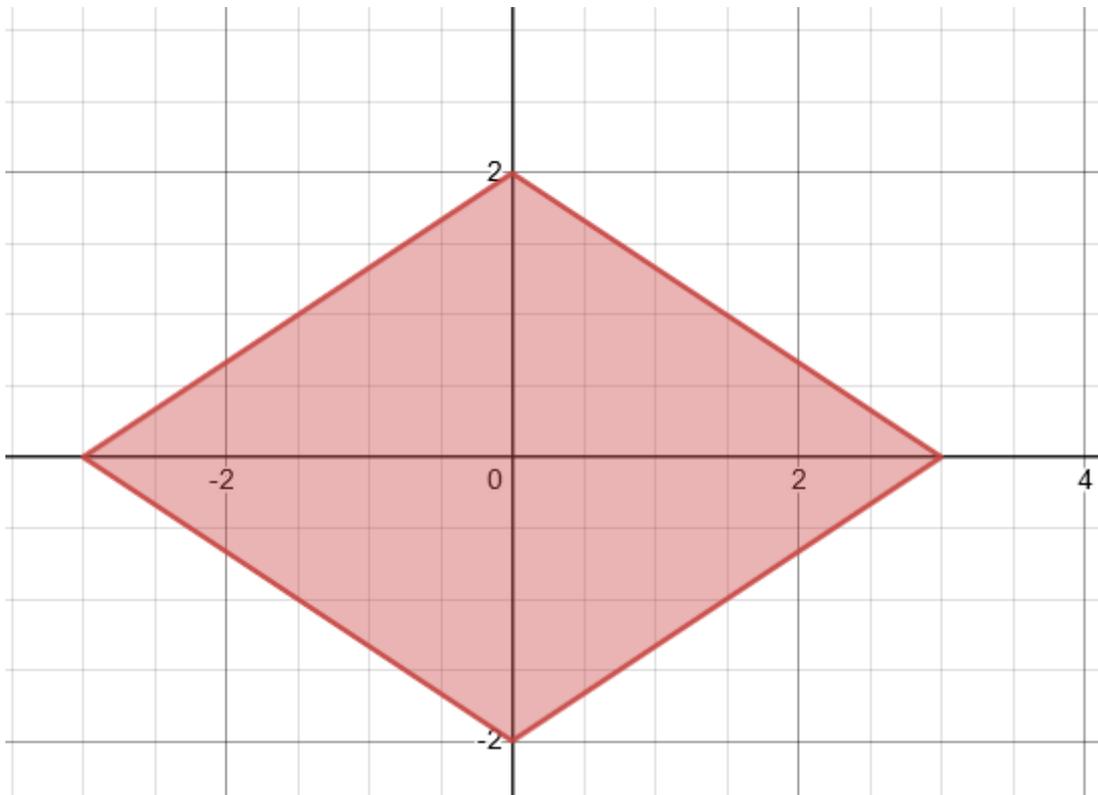
Statement

平面上 $2|x| + 3|y| \leq 6$ 所表示區域的面積為何？

- (A) 4
- (B) 8
- (C) 12
- (D) 16
- (E) 32

Solution

畫出圖



面積為 $\frac{4 \times 6}{2} = 12$ ，故選(C)。

101年第2次北科入學數學會考

101-02-01

Statement

設 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ， $\cos \beta = \frac{-5}{13}$ ，且 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ， $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ ，則 $\sin(\alpha - \beta) = ?$

(A) $\frac{-56}{65}$

(B) $\frac{-16}{65}$

(C) $\frac{16}{65}$

(D) $\frac{27}{65}$

(E) $\frac{56}{65}$

Solution

$$\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore 0 < \sin \alpha < 1, 0 < \cos \alpha < 1$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\because \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$$

$$\therefore 0 < \sin \beta < 1, -1 < \cos \beta < 0$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{-5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \times \frac{-5}{13} - \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} = \frac{-20}{65} - \frac{36}{65} = \frac{-56}{65}$$

102-02-02

Statement

方程式 $2^{x^2} \cdot 4^x \cdot 16 = 8^x \cdot 64$ 之所有解的和為何？

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 2

Solution

將式子改寫。

$$2^{x^2} \cdot 4^x = 8^x \cdot 64$$

$$\Rightarrow 2^{x^2} \cdot 2^{2x} = 2^{3x} \cdot 2^6$$

$$\Rightarrow 2^{x^2+2x} = 2^{3x+6}$$

兩邊同取 \log_2 ，得到 $x^2 + 2x = 3x + 6$

也就得到 $x^2 - x - 6 = 0$ ，因式分解得到 $(x - 3)(x + 2) = 0$

解根得到 $x = 3$ 或 $x = -2$ ， $3 + (-2) = 1$

101-02-03

Statement

已知 Γ 表 $f(x, y) = 0$ 所對應之圖形，若 Γ 水平方向拉長2倍，再往右平移1單位，則此新圖形的方程式為何？

(A) $f\left(\frac{x}{2} + 1, y\right) = 0$

(B) $f\left(\frac{x-1}{2}, y\right) = 0$

(C) $f\left(\frac{x+1}{2}, y\right) = 0$

(D) $f(2x + 1, y) = 0$

(E) $f(2x - 1, y) = 0$

Solution

考慮拉長兩倍，那麼 a 要變大兩倍，因此 x 乘以 $\frac{1}{2}$

考慮往右平移一單位，那麼座標 $x - 1$ ，因此 x 減1

因此 $f = \left(\frac{x-1}{2}, y\right) = 0$ ，故選(B)

101-02-04

Statement

設直線 L 過點 $(-1, 1)$ 且與直線 $8x - 6y = 1$ 垂直，則此直線方程式為何？

(A) $3x - 4y = -1$

(B) $4x + 3y = -1$

(C) $4x - 3y = -7$

(D) $3x + 4y = 1$

(E) $x - y = -2$

Solution

直線 $8x - 6y = 1$ 的斜率為 $\frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}$

因此造一條與其垂直的直線，這條直線的斜率與其斜率乘積必為 -1 。

$$\frac{4}{3} \times m = -1, m = \frac{-3}{4}$$

已知此直線會過點 $(-1, 1)$ ，因此 $y - 1 = \frac{-3}{4}(x + 1)$

$$4y - 4 = -3(x + 1), 3x + 4y = 1$$

101-02-05

Statement

過點 $(2, -3)$ 與圓 $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$ 相切的直線方程式為何？

- (A) $2x - y = 7$
- (B) $x + 2y = -4$
- (C) $2x - 3y = 13$
- (D) $3x - 2y = 12$
- (E) $x - 2y = 8$

Solution

從圓的方程式可以知道，圓心為 $(1, -1)$ 且半徑為 $\sqrt{5}$ 。

因此我們可設過點 $(2, -3)$ 的直線方程式，並且距離與圓心剛好為 $\sqrt{5}$

可以套用距離公式來得到。

令與圓相切的直線為 $y + 3 = m(x - 2)$

整理後得到 $mx - y - 2m - 3 = 0$

我們可以套用距離公式，得到 $\frac{|mx - y - 2m - 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$

將圓心帶入距離公式，得到 $|m + 1 - 2m - 3| = \sqrt{5}\sqrt{m^2 + 1}$

整理後得到 $|-m - 2| = \sqrt{5m^2 + 5}$

兩邊平方後得到 $(-m - 2)^2 = 5m^2 - 5 \Rightarrow m^2 + 4m + 4 = 5m^2 + 5$

因此 $-4m^2 + 4m - 1 = 0$ ， $m = \frac{1}{2}$ (重根)

$$y + 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$\Rightarrow 2y + 6 = x - 2$$

$$\Rightarrow x - 2y - 8 = 0$$

$$\Rightarrow x - 2y = 8$$

101-02-06

Statement

以 $(1, 3 + \sqrt{5})$ 與 $(1, 3 - \sqrt{5})$ 為兩焦點且短軸長為6之橢圓方程式為何？

(A) $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{14} = 1$

(B) $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$

(C) $\frac{(x-1)^2}{14} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

(D) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{14} = 1$

(E) $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

Solution

兩焦點只有 y 軸有變動，因此這是一個貫軸平行 y 軸的橢圓。

$$\text{中心}(x, y) = \left(\frac{1+1}{2}, \frac{3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}}{2} \right) = (1, 3)$$

$$2c = (3 + \sqrt{5}) - (3 - \sqrt{5}) = 2\sqrt{5}, c = \sqrt{5}$$

$$2b = 6, b = 3$$

$$\text{因此 } a = \sqrt{3^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{9+5} = \sqrt{14}$$

依照 $\frac{(x-h)}{b} + \frac{(y-k)}{a} = 1$ 列式，得

$$\frac{(x-1)}{9} + \frac{(y-3)}{14} = 1$$

101-02-07

Statement

設 $2\log(x-3) - \log 2 = \log(x+9)$ ，則 $x^2 - 10x + 12$ 之值為何？

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

Solution

$$2 \log(x-3) - \log 2 = \log(x+9)$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{x^2 - 6x + 9}{x+9}\right) = \log(2)$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{x^2 - 6x + 9}{2x + 18}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 6x + 9}{2x + 18} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 2x + 18$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x - 9 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-9) = 0$$

得到 $x = -1, x = 9$

驗根，由於 $x = -1$ 帶進去後， $x - 3 < 0$ ，又因為 \log 的定義域為正整數之集合，故 $x = -1$ 不合。

因此 $x = 9$ 。

$$9^2 - 90 + 12 = 81 - 90 + 12 = 3, \text{ 故選}(C)。$$

101-02-08

Statement

若 $0 \leq \theta < 2\pi$ ，則 $\cos 2\theta + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} = 1$ 有幾個解？

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(E) 4

Solution

利用和角公式，可以知道

$$\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \cos^2 \frac{\theta}{2} - (1 - \cos^2 \frac{\theta}{2}) = 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 = \cos \theta$$

$$\text{因此 } \cos \theta + 1 = 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\text{且 } \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$2 \cos^2 \theta - 1 + \cos \theta + 1 = 1$$

$$2 \cos^2 \theta + \cos \theta = 1$$

$$2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0$$

$$\text{令 } t = \cos \theta, \text{ 則 } 2t^2 + t - 1 = 0, \text{ 可得 } t = \frac{1}{2} \text{ 或 } t = -1$$

考慮 $t = \cos \theta = \frac{1}{2}$ ，則 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 或 $\theta = \frac{-\pi}{3}$

考慮 $t = \cos \theta = -1$ ，則 $\theta = \pi$

因此有三組解，故選(D)

101-02-09

Statement

設 a 、 b 、 c 分別表示 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 之對邊長，若 $b^2 - (c - a)^2 = ca$ ，則 $\angle B = ?$

- (A) 30°
- (B) 45°
- (C) 60°
- (D) 120°
- (E) 135°

Solution

$$b^2 - (c - a)^2 = ca$$

$$\Rightarrow b^2 - (c^2 - 2ac + a^2) = ca$$

$$\Rightarrow b^2 - c^2 + 2ac - a^2 = ca$$

$$\Rightarrow b^2 - c^2 - a^2 = -ac$$

$$\Rightarrow a^2 + c^2 - b^2 = ac$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$$

$$\text{又 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$$

因此 $\angle B = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$ ，故選(C)。

101-02-10

Statement

方程式 $x^{1+\log_2 x} = (2x^3)$ 之所有解的和為何？

- (A) $\frac{15}{2}$
- (B) 8
- (C) $\frac{17}{2}$
- (D) 9
- (E) $\frac{19}{2}$

Solution

$$x^{1+\log_2 x} = 8x^3$$

$$\Rightarrow 1 + \log_2 x = \log_x(8x^3)$$

$$\Rightarrow 1 + \log_2 x = \frac{\log_2 8x^3}{\log_2 x}$$

$$\Rightarrow \log_2 x + (\log_2 x)^2 = \log_2 8x^3$$

$$\Rightarrow \log_2 x + (\log_2 x)^2 = 3 + 3\log_2 x$$

$$\text{令 } t = \log_2 x, \text{ 則 } t + t^2 = 3 + 3t$$

$$\Rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$\Rightarrow t = 3 \text{ 或 } t = -1$$

$$\text{還原 } t, \text{ 得到 } \begin{cases} \log_2 x = 3, & x = 8 \\ \log_2 x = -1, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{因此 } 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}, \text{ 故選 } (C)$$

101-02-11

Statement

若 $f(x) = \frac{x-1}{x}$, 且 $(f \circ g)(x) = \frac{x}{x+1}$, 則 $g(0) = ?$

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3
- (E) 4

Solution

$f(x) = \frac{x-1}{x}$, 則 $f(g(0)) = \frac{g(0)-1}{g(0)} = 0$, 因此 $\frac{g(0)-1}{g(0)} = 0$, 因此 $g(0) = 1$, 故選 (B)。

101-02-12

Statement

已知平面上兩點 $A(-3, 1)$, $B(3, 5)$, 又點 $P(a, b)$ 在直線 $2x + y + 1 = 0$ 且 $\overline{PA} = \overline{PB}$, 則 $a + b = ?$

- (A) 5
- (B) 6
- (C) 7
- (D) 8
- (E) 9

Solution

將 A, B 兩點帶入直線，確定是否同側或異側。

$$\text{代入點} A: 2 \cdot (-3) + 1 + 1 = -4$$

$$\text{代入點} B: 2 \times 3 + 5 + 1 = 12$$

因此兩點異側。

$$2x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -2x - 1$$

由於 $\overline{PA} = \overline{PB}$ ，因此

$$\sqrt{(-3-x)^2 + (1-y)^2} = \sqrt{(3-x)^2 + (5-y)^2}$$

$$\Rightarrow (-3-x)^2 + (1+2x+1)^2 = (3-x)^2 + (5+2x+1)^2$$

$$\Rightarrow (-3-x)^2 + (2x+2)^2 = (3-x)^2 + (6+2x)^2$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 14x + 13 = 5x^2 + 18x + 45$$

$$\Rightarrow -4x = 32$$

$$\Rightarrow x = -8$$

$$\Rightarrow y = 15$$

因此 $a = -8, b = 15, a + b = 7$ ，故選(C)

101-02-13

Statement

設二向量 $\vec{a} = \langle 2, t^2 - 3 \rangle, \vec{b} = \langle t, -1 \rangle$ 。

若 \vec{a} 和 \vec{b} 的夾角為 $\frac{\pi}{2}$ ，且 \vec{b} 的長度不大於2，則 $t = ?$

(A) -2

(B) -1

(C) 2

(D) 3

(E) 4

Solution

$\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ，因此 $|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = 0$ ，因此 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2t - t^2 + 3 = (-t + 3)(t + 1) = 0$$

得到 $t = 3$ 或 $t = -1$

長度不大於2，因此我們考慮兩種 t 套進 \vec{b} 的影響

考慮 $t = 3$ ，得到 $\sqrt{(3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} > 2$ ，因此 $t = 3$ 不合

考慮 $t = -1$ ，得到 $\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

因此 $t = -1$ ，故選(B)。

101-02-14

Statement

設 $\alpha + \beta$ ， $\alpha - \beta$ 為方程式 $x^2 - 6x + 5 = 0$ 的兩根，且 $\alpha < \beta + 2$ ，則 $\beta = ?$

- (A) -2
- (B) -1
- (C) 2
- (D) 3
- (E) 4

Solution

利用根與係數，可以知道

$$(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) = -\left(\frac{-6}{1}\right) = 6$$

$$2\alpha = 6 \text{ 則 } \alpha = 3$$

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2 = 5, \text{ 則 } \beta = \pm 2$$

由於要滿足 $\alpha < \beta + 2$ ，所以 $\beta = -2$ 不合。

因此 $\beta = 2$ ，故選(C)。

101-02-15

Statement

設 f 為奇函數， g 為偶函數，及對所有的 x ，恆有 $f(-x) = -f(x)$ 且 $g(-x) = g(x)$ 。

如果 f 和 g 均為非零函數，則下列何者恆為正確？

- (A) $f - g$ 為奇函數
- (B) $f \cdot g$ 為奇函數
- (C) $f^3 \cdot g^3$ 為偶函數
- (D) $2f + 3g$ 為偶函數
- (E) $f + g$ 的函數圖形對稱於 y 軸

Solution

當一函數符合奇偶性，則多項式的所有變數次方會全是偶數或是奇數。

通常奇偶函數做相加減時，得到的結果不會是奇函數或是偶函數。

奇偶函數做乘除時，就類似數的乘除，例如奇乘偶會得到奇。

故選(B)。

101-02-16

Statement

下列何者為函數 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1}}$ 的定義域？

- (A) $\{x|x < -1\}$
- (B) $\{x|x > -1\}$
- (C) $\{x|-1 < x < 1\}$
- (D) $\{x|-1 < x, x \neq 1\}$
- (E) $\{x|x > 1\}$

Solution

$$\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} > 0$$

$$\Rightarrow x^3 - x^2 - x + 1 > 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2(x+1) > 0, \text{ 得到 } x \neq 1 \text{ 且 } x \neq -1$$

由於 $(x-1)^2$ 恆正，因此我們考慮 $(x+1) > 0$ ，得到 $x > -1$ 。

因此 $f(x)$ 的定義域 $D(f(x)) = \{x|(x > -1), (x \neq 1)\}$ ，故選 (D)

101-02-17

Statement

設 $\frac{x^2 - 10x + 8}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$ 的部份分式為 $\frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2}$ ，則 $a - b - c = ?$

- (A) -2
- (B) -1
- (C) 1
- (D) 3
- (E) 5

Solution

$$\frac{x^2 - 10x + 8}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} \Rightarrow \frac{x^2 - 10x + 8}{(x-2)^2(x+2)}$$

$$x^2 - 10x + 8 = a(x-2)^2 + b(x-2)(x+2) + c(x+2)$$

$$\text{令 } x = 2, 4 - 20 + 8 = 4c, \text{ 得到 } c = -2$$

$$\text{令 } x = -2, 16a = 4 + 20 + 8 = 32, \text{ 得到 } a = 2$$

$$\text{令 } x = 0, 8 = 4a - 4b + 2c = 8 - 4b - 4, \text{ 得到 } b = -1$$

$$a - b - c = 2 - (-1) - (-2) = 5, \text{ 故選 (E)。$$

101-02-18

Statement

設 $2x^2 + (k-1)x + (k-3) = 0$ 之一根大於2，一根小於1，則 k 之範圍為何？

- (A) $\{k|k < -1\}$
- (B) $\{k|1 < k < 3\}$
- (C) $\{k|-1 < k < 3\}$
- (D) $\{k|k > 1\}$
- (E) $\{k|-\infty < k < \infty\}$

Solution

$$\frac{-(k-1) \pm \sqrt{(k-1)^2 - 4 \times 2 \times (k-3)}}{2 \times 2}$$
$$\Rightarrow \frac{-k+1 \pm \sqrt{k^2 - 2k + 1 - 8k + 24}}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{-k+1 \pm \sqrt{k^2 - 10k + 25}}{4}$$

一根大於2，因此用 $\frac{-k+1 + \sqrt{k^2 - 10k + 25}}{4}$ 考慮

因此 $-k+1 + \sqrt{k^2 - 10k + 25} > 8$ ， $-k+1 + (k-5) > 8$ ，得到 $k < -1$

一根小於1，因此用 $\frac{-k+1 - \sqrt{k^2 - 10k + 25}}{4}$ 考慮

因此 $-k+1 - \sqrt{k^2 - 10k + 25} < 4$ ， $-k+1 + (k-5) < 4$ ，得到 $k \in \mathbb{R}$

取聯集得到 $k < -1$ ，因此 k 的範圍為 $\{k|k < -1\}$ ，故選(A)

101-02-19

Statement

若 $f(x) = \sqrt{3-x}$ ， $g(x) = \sqrt{x-1}$ ，則 $f \circ g$ 的定義域為何？

- (A) $[1, 3]$
- (B) $[1, 4]$
- (C) $[2, 4]$
- (D) $[3, 9]$
- (E) $[1, 10]$

Solution

$$f \circ g = \sqrt{3 - \sqrt{x-1}}$$

考慮根號內的數字必須要是非負整數，得到 $3 - \sqrt{x-1} \geq 0$ ， $x \leq 10$

考慮根號內的數字必須要是非負整數，得到 $x-1 \geq 0$ ，得到 $x \geq 1$

取交集後得到 $1 \leq x \leq 10$ ，故選(E)。

101-02-20

Statement

若 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ 能被 $x^2 + 1$ 整除，則 $f(x)$ 除以 $x + 1$ 的餘式為何？

- (A) 2
- (B) 4
- (C) 6
- (D) 8
- (E) 10

Solution

利用長除法來做 $f(x)$ 除以 $x^2 + 1$ ，可以得到商為 $(x + a)$ 且餘數為 $(b - 1)x + (2 - a)$

因為能夠被整除，因此餘數為0，得到 $b = 1$ 且 $a = 2$

因此 $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$

除以 $x + 1$ ，利用餘式定理，將 x 帶-1

因此 $f(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 + (-1) + 2 = -1 + 2 + (-1) + 2 = 2$ ，故選(A)

102年第1次北科入學數學會考

102-01-01

Statement

若 $\log(x-9) + \log(x-5) = \log 4 + \log(25-2x)$ ，則 $x = ?$

- (A) 9
- (B) 10
- (C) 11
- (D) 12
- (E) 13

Solution

$$\log(x-9) + \log(x-5) = \log 4 + \log(25-2x)$$

$$\Rightarrow \log((x-9)(x-5)) = \log(4(25-2x))$$

$$\Rightarrow \log(x^2 - 14x + 45) = \log(100 - 8x)$$

$$\Rightarrow x^2 - 14x + 45 = 100 - 8x$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x - 55 = 0$$

$$\Rightarrow (x-11)(x+5) = 0$$

可得 $x = -5$ 或 $x = 11$ 。

驗根，可知當 $x = -5$ 代入 $\log(x-9)$ ，會得到 $\log -14$

\log 的定義域為正整數之集合，故不合。

因此 $x = 11$ ，故選(C)。

102-01-02

Statement

已知 $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi, \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ 。若 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}, \tan \beta = \frac{1}{3}$ ，則 $\sin(\alpha + \beta) = ?$

- (A) $\frac{\sqrt{10}}{10}$
- (B) $\frac{2\sqrt{10}}{10}$
- (C) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$
- (D) $\frac{\sqrt{15}}{10}$
- (E) $\frac{\sqrt{17}}{10}$

Solution

$\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ ，因為 $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ，則 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ 。

$\tan \beta = \frac{1}{3}$ ，因為 $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ ，則 $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ，而 $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

因此 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{-9\sqrt{10}}{50} + \frac{4\sqrt{10}}{50} = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ，故選(A)。

102-01-03

Statement

已知 \vec{a} 與 \vec{b} 為兩向量， $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ， $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$ 且 $|\vec{a} - \vec{b}| = 3$ 。

若 \vec{a} 與 \vec{b} 之夾角為 θ ，則 $\cos \theta = ?$

- (A) $\frac{1}{7}$
- (B) $\frac{1}{6}$
- (C) $\frac{1}{5}$
- (D) $\frac{6}{25}$
- (E) $\frac{7}{25}$

Solution

$$(|\vec{a} + \vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 16$$

$$(|\vec{a} - \vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 9$$

$$\text{因此，} 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 7, \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{7}{4}$$

$$\text{又 } |\vec{a}| = |\vec{b}|, \text{ 因此 } 2|\vec{a}|^2 - \frac{7}{2} = 9, |\vec{a}| = \frac{5}{2}$$

$$\text{已知 } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cos \theta = \frac{7}{4}, \text{ 得到 } \cos \theta = \frac{7}{25}, \text{ 故選(E)}$$

102-01-04

Statement

若 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \sqrt{3} + 1$ ， $\overline{BC} = 2$ 且 $\angle B = 30^\circ$ ，則 $\angle A = ?$

- (A) 30°
- (B) 45°
- (C) 60°
- (D) 90°
- (E) 120°

Solution

$$\overline{AC}^2 = (\sqrt{3} + 1)^2 + (2)^2 - 2 \cdot (\sqrt{3} + 1) \cdot (2) \cdot \cos \beta$$

$$= 3 + 2\sqrt{3} + 1 + 4 - (4\sqrt{3} + 4) \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$$

$$\text{因此 } \overline{AC} = \sqrt{2}$$

已知 $\frac{\overline{AC}}{\sin \beta} = \frac{\overline{BC}}{\sin \alpha}$ ，因此 $\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sin \alpha}$ ，得到 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，因此 $\alpha = 45^\circ$ ，故選(B)

102-01-05

Statement

下列敘述何者正確？

(A) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ 的定義域為 $(-1, \infty)$

(B) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ 的定義域為 $[-1, \infty)$

(C) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ 的值域為 $[1, \infty)$

(D) $f(x) = \sqrt{x+1}$ 的定義域為 $[-1, \infty)$

(E) $f(x) = \sqrt{x+1}$ 的值域為 $[1, \infty)$

Solution

(A) 的定義域為 \mathbb{R}

(B) 的定義域為 \mathbb{R}

(C) 的值域為 $[0, \infty)$

(E) 的值域為 $[0, \infty)$

故選(D)

102-01-06

Statement

若 $\frac{16x^3 - 20x^2 + 6x + 3}{(2x-1)^4} = \frac{a}{(2x-1)} + \frac{b}{(2x-1)^2} + \frac{c}{(2x-1)^3} + \frac{d}{(2x-1)^4}$ ，則 $a - b + c - d = ?$

(A) -3

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 3

Solution

$$\frac{16x^3 - 20x^2 + 6x + 3}{(2x - 1)^4} = \frac{a}{(2x - 1)} + \frac{b}{(2x - 1)^2} + \frac{c}{(2x - 1)^3} + \frac{d}{(2x - 1)^4}$$
$$\Rightarrow 16x^3 - 20x^2 + 6x + 3 = a(2x - 1)^3 + b(2x - 1)^2 + c(2x - 1) + d$$

利用綜合除法

$$\begin{array}{r|rrrr} 16 & -20 & 6 & 3 & \\ & 8 & -6 & 0 & \\ \hline 8 & -6 & 0 & 3 & \\ & 4 & -1 & & \\ \hline 4 & -1 & -1 & & \\ & 2 & & & \\ \hline 2 & 1 & & & \end{array} \quad 1/2$$

綠色：請注意做這樣的綜合除法時，使用的是 $x - \frac{1}{2}$ ，為了還原成 $2x - 1$ ，因此要把係數除以2。

得到 $a = 2, b = 1, c = -1, d = 3$ ，因此 $a - b + c - d = 2 - 1 + (-1) - 3 = -3$ ，故選(A)

102-01-07

Statement

若橢圓 $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 24 = 0$ 的長、短軸長各為 a 、 b ，則 $a + b = ?$

- (A) $\frac{5}{7}$
- (B) $\frac{10}{7}$
- (C) $\frac{15}{7}$
- (D) $\frac{35}{6}$
- (E) $\frac{35}{3}$

Solution

$$4x^2 + 16x + 9y^2 - 18y = 24$$

$$\Rightarrow 4(x^2 + 4x + 4) + 9(y^2 - 2y + 1) = 24 + 16 + 9$$

$$\Rightarrow 4(x + 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 49$$

$$\Rightarrow \frac{(x + 2)^2}{\frac{49}{4}} + \frac{(y - 1)^2}{\frac{49}{9}} = 1$$

$$\text{可知長軸為 } 2\sqrt{\frac{49}{4}} = 7, \text{ 短軸為 } 2\sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{14}{3}$$

$$7 + \frac{14}{3} = \frac{35}{3}, \text{ 故選}(E)$$

102-01-08

Statement

下列何者錯誤？

(A) $\sin \frac{8\pi}{3} = \sin \frac{2\pi}{3}$

(B) $\cos \frac{17\pi}{6} = -\sin \frac{\pi}{3}$

(C) $\tan \frac{11\pi}{3} = \tan \frac{2\pi}{3}$

(D) $\sec \frac{15\pi}{4} = -\sec \frac{\pi}{4}$

(E) $\csc \frac{7\pi}{6} = -\csc \frac{\pi}{6}$

Solution

$$\sec \frac{15\pi}{4} = \sec 675^\circ = \sec 45^\circ$$

$$\sec 45^\circ \neq -\sec 45^\circ, \text{ 故選}(D)$$

102-01-09

Statement

$$\text{若 } f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 7 = a(x - 2)^4 + b(x - 2)^3 + c(x - 2)^2 + d(x - 2) + e$$

則 $a + b + c = ?$

(A) 20

(B) 21

(C) 22

(D) 23

(E) 24

Solution

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 & 7 & 2 \\ & 2 & 0 & 6 & 12 & \\ \hline 1 & 0 & 3 & 6 & & 19 \\ & 2 & 4 & 14 & & \\ \hline 1 & 2 & 7 & & & 20 \\ & 2 & 8 & & & \\ \hline 1 & 4 & & & & 15 \\ & 2 & & & & \\ \hline 1 & 6 & & & & \end{array}$$

故 $a = 1, b = 6, c = 15, d = 20, e = 19$

因此 $a + b + c = 22$ ，故選(C)

102-01-10

Statement

若 $L_1 = 2x - y + 7 = 0$ 與 $L_2 = ax + y - 13 = 0$ 的交角為 $\frac{\pi}{4}$ 且 $a > 0$ ，則 $a = ?$

- (A) 6
- (B) 5
- (C) 4
- (D) 3
- (E) 2

Solution

$$m_1 = -\frac{2}{-1} = 2, m_2 = -\frac{a}{1} = -a$$

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} = \frac{2 - (-a)}{1 - 2a} = \frac{2 + a}{1 - 2a}$$

交角可能是 $\tan 45^\circ$ 或 $\tan 135^\circ$ ，因此考慮

若是 $\tan 45^\circ$ ，則 $\frac{2+a}{1-2a} = 1$ ，得到 $a = -\frac{1}{3}$ ，不合。

若是 $\tan 135^\circ$ ，則 $\frac{2+a}{1-2a} = -1$ ，得到 $a = 3$

因此 $a = 3$ ，故選(D)

102-01-11

Statement

求不等式 $1 + \frac{2x-7}{(x-2)^2} < 0$ 的解為何？

(A) $3 > x$

(B) $x < -1$

(C) $-1 < x < 2$ 或 $2 < x < 3$

(D) $-1 < x < 3$

(E) $x < -1$ 或 $3 < x$

Solution

$$1 + \frac{2x-7}{(x-2)^2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 4} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)(x+1)}{(x-2)^2} < 0$$

考慮定義域，得到條件1： $x \neq 2$

因此考慮以下兩種情況

$$\begin{cases} (x-3)(x+1) > 0 \\ (x-2)^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\begin{cases} (x-3)(x+1) < 0 \\ (x-2)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 3$$

將這兩種情況取聯集，與條件1取交集，得到 $-1 < x < 2$ 或 $2 < x < 3$ ，故選(C)

102-01-12

Statement

若拋物線 $x^2 = y + 3$ 與直線 $5x + y - 3 = 0$ 相交於 $P(a, b)$ 及 $Q(c, d)$ 且 $a > c$ ，則 $b - d = ?$

(A) -35

(B) -8

(C) 31

(D) 35

(E) 8

Solution

$$x^2 = y + 3 \Rightarrow y = x^2 - 3$$

$$5x + y - 3 = 0 \Rightarrow y = -5x + 3$$

$$\text{則 } x^2 - 3 = -5x + 3, \text{ 得到 } x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 6)(x - 1) = 0$$

因此 $x = -6$ 或 $x = 1$

得到 $a = 1$ 且 $c = -6$ ，代入原方程式得到 $b = -2$ 且 $d = 33$

因此 $b - d = -2 - 33 = -35$ ，故選(A)

102-01-13

Statement

若 $P(4, 1)$ 、 $Q(2, 1)$ 、 $R(a, a)$ 且 $\overline{PR} + \overline{QR}$ 的值為最小，則 $a = ?$

- (A) 1
- (B) $\frac{3}{2}$
- (C) $\frac{5}{4}$
- (D) $\frac{7}{4}$
- (E) 2

Solution

考慮 $R(a, a)$ 在 $y = x$ 上，因此我們可以試著確定 P 、 Q 是否在 $y = x$ 不同側上。

判別式為 $y - x$ ，代入 $P(4, 1)$ 得 3，代入 $Q(2, 1)$ 得 1，因此同側。

因此，我們考慮在 $y = x$ 上做一鏡像 Q' ，求一直線 L 經過 P 與 Q' ，與 $y = x$ 之交集點。

$$\text{可得 } Q' = (1, 2), \text{ 利用點斜式得到直線 } y - 2 = \frac{2 - 1}{1 - 4}(x - 1) \Rightarrow 3y = -x + 7$$

與 $y = x$ 取交集，得到 $x = \frac{7}{4}$ ，因此 $a = \frac{7}{4}$ ，故選(D)

102-01-14

Statement

若雙曲線之漸進線為 x 軸與 y 軸且過點 $(1, -1)$ ，則此雙曲線方程式為何？

- (A) $x^2 - (y + 1)^2 = 1$
 (B) $xy = -1$
 (C) $y^2 - (x - 1)^2 = 1$
 (D) $\frac{(x - 1)^2}{4} - (y + 1)^2 = 1$
 (E) $\frac{(x + 1)^2}{4} - (y + 1)^2 = -1$

Solution

漸進線為 x 軸與 y 軸，因此雙曲線為直角雙曲線 $xy = c$ 之形式，故選(B)。

102-01-15

Statement

若 $a = \log 2$ 、 $b = \log 3$ ，則 $10^{3a-2b} = ?$

- (A) $\frac{8}{9}$
 (B) $\frac{11}{10}$
 (C) 1
 (D) 10
 (E) 12

Solution

$10^{3a-2b} = 10^{3\log 2 - 2\log 3} = 10^{\log 8 - \log 9} = 10^{\log \frac{8}{9}} = \frac{8}{9}$ ，故選(A)

102-01-16

Statement

若 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3}$ 且 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，則 $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = ?$

- (A) $\frac{4}{9}$
 (B) $\frac{\sqrt{17}}{9}$
 (C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
 (D) $\frac{\sqrt{19}}{9}$
 (E) $\frac{2\sqrt{5}}{9}$

Solution

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3} \text{ 且 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \text{ 因此 } \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$\text{因此 } -2 \sin \theta \cos \theta = \frac{-8}{9}, \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

$$\text{可知 } \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{8}{9}$$

$$\text{則 } \cos 2\theta = \sqrt{1 - \sin^2 2\theta} = \frac{\sqrt{17}}{9} = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\text{由於上述已知 } \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}, \text{ 因此 } \frac{\pi}{2} < 2\theta < \pi, \text{ 所以 } \cos 2\theta = \frac{-\sqrt{17}}{9}$$

$$\text{因此 } \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = \frac{\sqrt{17}}{9}, \text{ 故選(B)}$$

102-01-17

Statement

若直線通過點(3,4)且在第一象限與兩軸所圍三角形面積最小，則此直線的兩截距和為何？

- (A) 12
- (B) 13
- (C) 14
- (D) 15
- (E) 16

Solution 1

by Trava

設直線截距式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ，三角形面積為 $\frac{ab}{2}$ ，也就是當 ab 最小時，求 $a + b$

因為與第一象限圍成區域面積，所以 $a, b > 0$

$$\text{代入點(3,4)得等式 } \frac{3}{a} + \frac{4}{b} = 1$$

$$\text{利用算幾不等式 } \frac{\frac{3}{a} + \frac{4}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{12}{ab}}, \text{ 解得 } ab \text{ 最小值為 } 48$$

$$ab \text{ 反帶回去算幾不等式, } \frac{\frac{3}{a} + \frac{4}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{12}{48}}, \text{ 得到 } \frac{3}{a} + \frac{4}{b} \geq 1$$

$$\text{當等號成立 } \frac{3}{a} = \frac{4}{b}, \text{ 帶回 } \frac{3}{a} + \frac{4}{b} = 1$$

解得 $a = 6, b = 8$ ，因此 $a + b = 14$ ，故選(C)

Solution 2

by Uriah with Calculus

列出直線式子： $y - 4 = m(x - 3)$

求得 x, y 的截距：

$$\text{令 } x = 0, y = -3m + 4$$

$$\text{令 } y = 0, x = \frac{-4}{m} + 3$$

$$\text{因此 } xy = (-3m + 4)\left(\frac{-4}{m} + 3\right) = 12 - 9m - \frac{16}{m} + 12 = -9m - \frac{16}{m} + 24$$

利用微分解出極值，因此零次項捨去不用：

$$\therefore f'(m) = \frac{d}{dm}(f + g) = \frac{d}{dm}(f) + \frac{d}{dm}(g)$$

$$\therefore f'(m) = \frac{d}{dm}(-9m) + \frac{d}{dm}\left(-\frac{16}{m}\right)$$

$$f'(m) = -9 + \frac{16}{m^2} = 0$$

$$9m^2 = 16, m = \sqrt{\frac{16}{9}} = \pm \frac{4}{3} \text{ (正不合)}$$

$$\text{帶回截距，得 } y = \frac{-4}{3} \times -3 + 4 = 8, x = \frac{-4}{\frac{-4}{3}} + 3 = 6$$

$x + y = 14$ ，故選(C)

102-01-18

Statement

已知圓 $x^2 + y^2 = 10$ 與 $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 5$ 有兩交點，求此兩交點的距離為何？

- (A) $\sqrt{33}$
- (B) $\sqrt{35}$
- (C) $\sqrt{37}$
- (D) $\sqrt{39}$
- (E) $2\sqrt{10}$

Solution

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 5$$

$$\Rightarrow 10 - 2x + 4y = 5$$

$$\Rightarrow 4y = -5 + 2x$$

$$\Rightarrow y = \frac{-5 + 2x}{4}$$

$$x^2 + \frac{25 - 20x + 4x^2}{16} = 10$$

$$\Rightarrow 16x^2 + 25 - 20x + 4x^2 = 160$$

$$\Rightarrow 20x^2 - 20x - 135 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 4x - 27 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{7}$$

$$\text{考慮 } x = \frac{1}{2} + \sqrt{7}, \text{ 則 } y = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{7}$$

$$\text{考慮 } x = \frac{1}{2} - \sqrt{7}, \text{ 則 } y = -1 - \frac{1}{2}\sqrt{7}$$

因此兩點距離為 $\sqrt{\left(\left(\frac{1}{2} + \sqrt{7}\right) - \left(\frac{1}{2} - \sqrt{7}\right)\right)^2 + \left(\left(-1 + \frac{1}{2}\sqrt{7}\right) - \left(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{7}\right)\right)^2} = \sqrt{35}$ ，故選(B)

102-01-19

Statement

若數列的一般項為 $a_n = \frac{2}{(n+1)(n+3)}$ ，則 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{22} = ?$

(A) $\frac{276}{600}$

(B) $\frac{451}{600}$

(C) $\frac{476}{600}$

(D) $\frac{500}{600}$

(E) 1

Solution

$$a_n = \frac{2}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$$

推得規律，得到 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{22} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{24} - \frac{1}{25} = \frac{451}{600}$ ，故選(B)

102-01-20

Statement

若方程式 $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} - 16 = 0$ ，則 $x = ?$

(A) -3

(B) -2

(C) 1

(D) 2

(E) 3

Solution

令 $t = 2^x$ ，則 $t^2 - 6t - 16 = 0$ ，得到 $t = 8$ 或 $t = -2$ (不合)

還原 t ，得到 $x = 3$ ，故選 (E)

102年第2次北科入學數學會考

102-02-01

Statement

若 $\frac{12x^2 - 26x + 5}{(2x - 3)^3} = \frac{a}{2x - 3} + \frac{b}{(2x - 3)^2} + \frac{c}{(2x - 3)^3}$ ，則 $a + b + 2c = ?$

- (A) -9
- (B) -6
- (C) 0
- (D) 6
- (E) 9

Solution

將式子轉成 $12x^2 - 26x + 5 = a(2x - 3)^2 + b(2x - 3) + c(2x - 3)$

利用綜合除法

$$\begin{array}{r|rrr} 12 & -26 & 5 & \\ & 18 & -12 & \\ \hline 6 & -4 & -7 & \\ & 9 & & \\ \hline 3 & 5 & & \end{array} \quad 3/2$$

綠色字：將式子從 $x - \frac{3}{2}$ 轉成 $2x - 3$ ，因此要將係數除2，但餘數不變。

得到 $a = 3, b = 5, c = -7$ ，得到 $3 + 5 + 2 \times (-7) = -6$ ，故選(B)

102-02-02

Statement

若 $f(x + 2) = \frac{2 + x}{4 - x}$ ，則 $f(a) = ?$

- (A) $\frac{a}{6-a}$
 (B) $\frac{2+a}{2-a}$
 (C) $\frac{2+a}{4-a}$
 (D) $\frac{2-a}{2+a}$
 (E) $\frac{a}{6+a}$

Solution

$$x+2=a, x=a-2$$

$$\text{故 } f(a) = \frac{2+(a-2)}{4-(a-2)} = \frac{a}{6-a}, \text{ 故選(A)}$$

102-02-03

Statement

設 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 5$ 、 $\overline{BC} = 6$ 、 $\overline{CA} = 7$ ，則 $\cos^2 \frac{C}{2} = ?$

- (A) $\frac{1}{7}$
 (B) $\frac{2}{7}$
 (C) $\frac{4}{7}$
 (D) $\frac{5}{7}$
 (E) $\frac{6}{7}$

Solution

$$\cos C = \cos^2 \frac{C}{2} - \sin^2 \frac{C}{2} = 2 \cos^2 \frac{C}{2} - 1$$

$$\text{則 } \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{\cos C + 1}{2}$$

$$\text{利用餘式定理，} \cos C = \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2 \times 6 \times 7} = \frac{5}{7}$$

$$\text{因此 } \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{\frac{5}{7} + 1}{2} = \frac{6}{7}, \text{ 故選(E)}$$

102-02-04

Statement

已知圓 $x^2 + y^2 = 9$ ，與直線 $x + y = 3$ 相交於兩點，則此兩點距離為何？

- (A) 2
- (B) $2\sqrt{2}$
- (C) 3
- (D) $3\sqrt{2}$
- (E) 4

Solution

$$y = 3 - x, \text{ 則 } x^2 + (3 - x)^2 = 9$$

展開後得到 $2x^2 - 6x = 0$ ，得到 $x = 0$ 或 $x = 3$

代回原式，得到兩點 $(0, 3)$ 與 $(3, 0)$ ，距離為 $\sqrt{(0 - 3)^2 + (3 - 0)^2} = 3\sqrt{2}$ ，故選(D)

102-02-05

Statement

下列何者正確？

- (A) $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = \cos x$
- (B) $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin x$
- (C) $\tan(x + \frac{\pi}{2}) = \cot x$
- (D) $\sin(x + \pi) = \cos x$
- (E) $\csc(x + \frac{\pi}{2}) = \sec x$

Solution

$$\csc(x + \frac{\pi}{2}) = \sec x, \text{ 故選(E)}$$

102-02-06

Statement

若 $x^4 - 4x^3 - 14x^2 + 36x + 45 = (x - 1)^4 + a(x - 1)^3 + b(x - 1)^2 + c(x - 1) + d$ ，則
 $a + b + c + d = ?$

- (A) 24
- (B) 34
- (C) 44

(D) 54

(E) 64

Solution

利用綜合除法

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & -4 & -14 & 36 & 45 & \\ & 1 & -3 & -17 & 19 & \\ \hline 1 & -3 & -17 & 19 & 64 & \\ & 1 & -2 & -19 & & \\ \hline 1 & -2 & -19 & & 0 & \\ & 1 & -1 & & & \\ \hline 1 & -1 & & & -20 & \\ & 1 & & & & \\ \hline 1 & 0 & & & & \end{array}$$

因此 $a = 0, b = -20, c = 0, d = 64$ ，故 $a + b + c + d = 44$ ，故選(C)

102-02-07

Statement

設 O 為原點， $A(a, 0)$ ， $B(0, b)$ ，且 $\overline{AB} = 5$ ，則 $\triangle OAB$ 最大面積為何？

- (A) 6
- (B) $\frac{25}{4}$
- (C) $\frac{13}{2}$
- (D) 7
- (E) 8

Solution 1

By Trava with non-calculus solution

$$a^2, b^2 > 0$$

利用算幾不等式， $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2}$

$$\frac{25}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2}$$

$$\frac{25}{2} \geq |ab|$$

$$\frac{25}{4} \geq \frac{|ab|}{2}, \text{ 故選(B)}$$

Solution 2

By Uriah with calculus solution

$a^2 + b^2 = 25$ ，求 $\frac{ab}{2}$ 的最大值

可知 $a^2 = 25 - b^2$ ， $a = \sqrt{25 - b^2}$

因此 $f(b) = \frac{b\sqrt{25 - b^2}}{2}$ ，找極值。

微分後得到 $f'(b) = \frac{25 - 2b^2}{2\sqrt{25 - b^2}}$ ，令 $f'(b) = 0$ ，得到 $b = \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}$

因此 $f(b)$ 的極值發生在 $b = \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}$ 上

$b = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ ，代入後得 $f\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{25}{4}$

$b = \frac{-5\sqrt{2}}{2}$ ，代入後得 $f\left(\frac{-5\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-25}{4}$ ，因為面積為非負整數所以為 $\frac{25}{4}$

因此最大值為 $\frac{25}{4}$ ，故選(B)

102-02-08

Statement

設雙曲線之漸進線為 x 軸與 y 軸，且過點 $(-1, 1)$ ，則此雙曲線貫軸長為何？

- (A) 2
- (B) $\sqrt{5}$
- (C) $2\sqrt{2}$
- (D) 4
- (E) 5

Solution

由於漸進線為 x 軸與 y 軸，可知此雙曲線的頂點會通過 $y = x$ 或 $y = -x$ ，中心為 $(0, 0)$

因此可以列出雙曲線方程式 $xy = c$ ，代入 $(-1, 1)$ 得到 $c = -1$

因此雙曲線方程式為 $xy = -1$

求雙曲線頂點，令 $y = -x$ ，得到 $-x^2 = -1$ ，得到 $x = \pm 1$

因此頂點為 $(1, -1)$ 與 $(-1, 1)$

a 為頂點與原點之距離，因此貫軸長 $2a = 2\sqrt{1^2 + 1^2} = 2\sqrt{2}$ ，故選(C)

Statement

設 $\log_2 x^2 + \log_x 2 = 3$ 的兩根為 α 和 β ，則 $\alpha\beta = ?$

(A) $-\frac{3}{2}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{3}{2}$

(D) $\sqrt{2}$

(E) $2\sqrt{2}$

Solution

$$\log_2 x^2 + \log_x 2 = 3$$

$$\Rightarrow 2\log_2 x + \log_x 2 = 3$$

$$\Rightarrow 2\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = 3$$

$$\Rightarrow 2(\log_2 x)^2 + 1 = 3\log_2 x$$

令 $t = \log_2 x$ ，則

$$2t^2 + 1 = 3t$$

$$\Rightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0, \text{ 得到 } t = \frac{1}{2} \text{ 或 } t = 1$$

分別還原得到 $x = \sqrt{2}$ 或 $x = 2$ ，因此 $\alpha = \sqrt{2}$ ， $\beta = 2$

因此 $\alpha\beta = 2\sqrt{2}$ ，故選(E)

Statement

設 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ ， $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，則 $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = ?$

(A) $\frac{4}{9}$

(B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(C) $\frac{\sqrt{19}}{9}$

(D) $\frac{2\sqrt{5}}{9}$

(E) $\frac{5\sqrt{7}}{16}$

Solution

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) = (\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta)$$

$$\text{又}(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$\text{因此} -2 \sin \theta \cos \theta = \frac{-3}{4}, \text{ 得到} \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 + 2 \times \frac{3}{8} = \frac{7}{4}$$

$$\text{因此}(\sin \theta + \cos \theta) = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{代入原式, 得到} \sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \frac{\sqrt{7}}{2} \left(1 - \frac{3}{8}\right) = \frac{5\sqrt{7}}{16}, \text{ 故選}(E)$$

102-02-11

Statement

若直線通過點 $P(3, 4)$ 且兩軸截距均為整數，則滿足條件的直線共有幾條？

- (A) 3
- (B) 6
- (C) 9
- (D) 12**
- (E) 15

Solution

利用點斜式， $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

整理方程式，得到 $xb + ay = ab$

帶入點 $(3, 4)$ ，得到 $3b + 4a = ab \Rightarrow 3b + 4a - ab = 0 \Rightarrow ab - 3b - 4a = 0$

將 $ab - 3a - 4a = 0$ 寫成 $(b - 4)(a - 3) = 12$

令 $u = (b - 4), v = (a - 3)$ ，那麼 $uv = 12$

因為 $a, b \in \mathbb{Z}$ ，因此 $u, v \in \mathbb{Z}$

窮舉 uv 的 u 為整數的所有可能，可以知道一定會是12的因數。

因此考慮所有可以整除12的整數，得到 $[-1, -2, -3, -4, -6, -12, 1, 2, 3, 4, 6, 12]$

代換回去後可得到 b ，因此答案為12個，故選(D)

Statement

已知圓 $x^2 + y^2 = 10$ 與圓 $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 5$ 有兩交點，則以此兩交點與兩圓心為頂點所連接成的四邊形的面積為何？

(A) $4\sqrt{2}$

(B) 6

(C) $2\sqrt{10}$

(D) $\frac{5\sqrt{7}}{2}$

(E) $3\sqrt{5}$

Solution 1

Trava的精簡解

$$\text{設 } O_1 = (0, 0), O_2 = (1, -2)$$

$$\overline{O_1O_2} = \sqrt{(0-1)^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{設兩交點 } A, B, \text{ 則四邊形 } O_1AO_2B \text{ 可知 } \overline{O_1A} = \overline{AO_2} = \overline{O_2B} = \overline{BO_1} = \sqrt{10}$$

利用餘弦定理

$$5 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 - 2 \times 10 \times \cos \angle O_1AO_2$$

$$\text{因此 } \cos \angle O_1AO_2 = \frac{3}{4}, \text{ 而 } \sin \angle O_1AO_2 = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{因此面積為 } 2 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \sqrt{10} \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{5\sqrt{7}}{2}, \text{ 故選(D)}$$

Solution 2

Uriah的行列式解

$$\text{已知圓 } x^2 + y^2 = 10 \text{ 的圓心為 } (0, 0)$$

$$\text{圓 } x^2 + y^2 - 2x + 4y = 5 \text{ 透過配方法可得 } (x-1)^2 + (y+2)^2 = 10, \text{ 圓心為 } (1, -2)$$

對兩式解聯立

$$\text{可得 } 10 - 2x + 4y = 5, \text{ 也就是 } 2x - 4y = 5$$

$$\text{因此可得 } x = \frac{5+4y}{2} = 2y + \frac{5}{2}$$

$$(2y + \frac{5}{2})^2 + y^2 = 10$$

$$\Rightarrow 4y^2 + 10y + \frac{25}{4} + y^2 = 10$$

$$\Rightarrow 5y^2 + 10y - \frac{15}{4} = 0$$

$$\Rightarrow 20y^2 + 40y - 15 = 0$$

$$\text{因此得到 } y = -1 \pm \frac{\sqrt{7}}{2}, x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{7}$$

$$\text{得到兩交點 } \left(\frac{1}{2} + \sqrt{7}, -1 + \frac{\sqrt{7}}{2}\right) \text{ 與 } \left(\frac{1}{2} - \sqrt{7}, -1 - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$$

$$\text{利用行列式求面積, } \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{7} & 0 & \frac{1}{2} + \sqrt{7} & 1 & \frac{1}{2} - \sqrt{7} \\ -1 - \frac{\sqrt{7}}{2} & 0 & -1 + \frac{\sqrt{7}}{2} & -2 & -1 - \frac{\sqrt{7}}{2} \end{vmatrix} = \frac{5\sqrt{7}}{2}, \text{ 故選(D)}$$

102-02-13

Statement

若一數列前 n 項的和為 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2 + 5$, 則 $a_5 + a_{10} + a_{15} + \dots + a_{50} = ?$

- (A) 175
- (B) 250
- (C) 320
- (D) 450
- (E) 540

Solution

$$\text{設 } S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2 + 5$$

觀察一下通式, 可知若 $a_i - a_j$, 其中 $i \neq j$, 則 $a_i - a_j = (i^2 - j^2) = (i - j)(i + j)$

又因若要求得 a_5 , 則可用 $(a_1 + a_2 + \dots + a_5) - (a_1 + a_2 + \dots + a_4)$

$$\text{因此 } a_5 = S_5 - S_4 = (5 - 4)(5 + 4) = (5 + 4)$$

$$\text{因此 } a_5 + a_{10} + a_{15} + \dots + a_{50} = (5 + 4) + (10 + 9) + (15 + 14) \dots + (50 + 49)$$

也就是首項為9, 公差為10, 末項99的等差數列和

$$\text{因此 } a_5 + a_{10} + a_{15} + \dots + a_{50} = \frac{(9 + 99)\left(\frac{99 - 9}{10} + 1\right)}{2} = 540, \text{ 故選(E)}$$

102-02-14

Statement

不等式 $4^{x+\frac{1}{2}} - 8 \cdot 2^{x+1} \leq 2^x - 8$, 共有幾個整數解?

- (A) 2
- (B) 3
- (C) 4
- (D) 5
- (E) 6

Solution

$$4^{x+\frac{1}{2}} - 8 \cdot 2^{x+1} \leq 2^x - 8$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2^{2x} - 16 \cdot 2^x \leq 2^x - 8$$

令 $t = 2^x$ ，則

$$2t^2 - 16t \leq t - 8$$

$$\Rightarrow 2t^2 - 17t + 8 \leq 0$$

$$\Rightarrow (2t - 1)(t - 8) \leq 0$$

得到 $\frac{1}{2} \leq t \leq 8$

還原 t ，得到 $-1 \leq x \leq 3$

故共有5個整數解，故選(D)

102-02-15

Statement

若 $f(x) = \sqrt{2-x}$ ， $g(x) = \sqrt{3-x}$ ，則 g 與 f 的合成函數 $g \circ f$ 的定義域為何？

(A) $[2, 3]$

(B) $(2, 3)$

(C) $[-7, 2]$

(D) $[2, 7]$

(E) $(2, 7)$

Solution

$g(f(x)) = \sqrt{3 - \sqrt{2-x}}$ ，可知 $2-x \geq 0$ ，因此 $x \leq 2$

又因 $3 - \sqrt{2-x} > 0$ ，因此 $\sqrt{2-x} < 3$ ， $x \geq -7$

因此得到 $x \in [-7, 2]$ ，故選(C)

102-02-16

Statement

在向量 $\triangle ABC$ 中，向量 $\vec{ab} = \langle 1, 2 \rangle$ ， $\vec{ac} = \langle -x, 2x \rangle$ ， $x > 0$

若 $\triangle ABC$ 之周長為 $6\sqrt{5}$ ，則 $x = ?$

(A) $\frac{10}{11}$

(B) $\frac{20}{11}$

(C) $\frac{30}{11}$

(D) $\frac{40}{11}$

(E) $\frac{50}{11}$

Solution

$\vec{ac} = \langle -x, 2x \rangle$, 可知 $\vec{ca} = \langle x, -2x \rangle$

因此 $\vec{bc} = \langle -x-1, 2x-2 \rangle$

$$\text{長度} \sqrt{1^2 + 2^2} + \sqrt{(-x)^2 + (2x)^2} + \sqrt{(-x-1)^2 + (2x-2)^2} = 6\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} + \sqrt{5x^2} + \sqrt{5x^2 - 6x + 5} = 6\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} + \sqrt{5}x + \sqrt{5x^2 - 6x + 5} = 6\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5x^2 - 6x + 5} = 5\sqrt{5} - \sqrt{5}x$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 6x + 5 = 125 - 50x + 5x^2$$

$$\Rightarrow 44x = 120$$

$$x = \frac{30}{11}$$

因此 $x = \frac{30}{11}$, 故選(C)

102-02-17

Statement

若 $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$, $g(x) = \frac{3x+x^3}{1+3x^2}$, 則 $f(g(x)) = ?$

(A) $\frac{1}{f(x)}$

(B) $f^2(x)$

(C) $2f(x)$

(D) $3f(x)$

(E) $4f(x)$

Solution

$$f(x) = \log(1+x) - \log(1-x)$$

$$f(g(x)) = \log\left(\frac{x^3+3x^2+3x+1}{1+3x^2}\right) - \log\left(\frac{1+3x^2-3x-x^3}{1+3x^2}\right)$$

$$= \log\left(\frac{(x+1)^3}{1+3x^2}\right) - \log\left(\frac{-(x-1)^3}{1+3x^2}\right)$$

$$= \log\left(\frac{x+1}{-(x-1)}\right)^3$$

$$= 3 \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 3f(x), \text{ 故選}(D)$$

102-02-18

Statement

$$\text{若 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{\sqrt{x+3} - 2} = 12, \text{ 則 } ab = ?$$

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 2

Solution

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{\sqrt{x+3} - 2} = 12$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + ax + b)(\sqrt{x+3} + 2)}{x - 1} = 12$$

極限有值，因此 $(x^2 + ax + b)$ 應可被 $(x - 1)$ 整除

$$\text{因此 } a + b = -1, (x^2 + ax + b) \div (x - 1) = x + (a + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + (a + 1))(\sqrt{x+3} + 2) = 12$$

$$\Rightarrow (2 + a)(4) = 12$$

$$\Rightarrow a = 1$$

$$\text{帶回 } a + b = -1, \text{ 得 } b = -2$$

$$\text{因此 } ab = -2, \text{ 故選}(A)$$

102-02-19

Statement

$$\text{設 } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ 則 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h^2 + 2h} = ?$$

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(B) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$

(C) $\frac{-1}{2\sqrt{2}}$

(D) $\frac{-1}{4\sqrt{2}}$

$$(E) \quad \frac{-1}{8\sqrt{2}}$$

Solution 1

Trava的精簡解

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h^2 + 2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h+2} \\ &= f'(2) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h+2} \\ &= \frac{-1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-1}{8\sqrt{2}}, \text{ 故選}(E) \end{aligned}$$

Solution 2

Uriah的暴力解

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h^2 + 2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{2+h}} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{h^2 + 2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{2+h})}{(h^2 + 2h)(\sqrt{4+2h})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{2-h})(\sqrt{4+2h})}{(4+2h)(h^2 + 2h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2-2-h)(\sqrt{4+2h})}{(4+2h)(h^2 + 2h)(\sqrt{2} + \sqrt{2+h})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-h)(\sqrt{4+2h})}{(4+2h)(h^2 + 2h)(\sqrt{2} + \sqrt{2+h})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(\sqrt{4+2h})}{(4+2h)(h+2)(\sqrt{2} + \sqrt{2+h})} \\ &= \frac{-1}{8\sqrt{2}}, \text{ 故選}(E) \end{aligned}$$

102-02-20

Statement

已知 Γ 表 $y = x^2$ 之圖形，若將 Γ 水平方向拉長2倍，往右平移1單位，再對 x 軸反射，得一個新的圖形，則此新圖形之表示式為何？

$$(A) \quad y = -\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2$$

$$(B) \quad y = -\frac{(x+1)^2}{2}$$

$$(C) \quad y = -\frac{(x-1)^2}{2}$$

$$(D) \quad y = -\left(\frac{x-1}{2}\right)^2$$

$$(E) \quad y = \frac{(1-x)^2}{2}$$

Solution

因為往右平移1單位，所以 x 改寫成 $x - 1$

然後 x 擴增兩倍，所以改寫成 $\frac{x - 1}{2}$

對 x 軸反射→加上一個負號，所以 $y = -\left(\frac{x - 1}{2}\right)^2$ ，故選(D)

103年第1次北科入學數學會考

103-01-01

Statement

$$\frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{97 \times 99} = ?$$

(A) $\frac{16}{99}$

(B) $\frac{17}{99}$

(C) $\frac{32}{99}$

(D) $\frac{34}{99}$

(E) $\frac{36}{99}$

Solution

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+2)(x+4)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{99} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{99-3}{297} \right) = \frac{48}{297} = \frac{16}{99}, \text{ 故選(A)} \end{aligned}$$

103-01-02

Statement

若 $\sqrt[3]{8\sqrt{16\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{2^x}$ ，則 $x = ?$

(A) 1

(B) 3

(C) 5

(D) 7

(E) 9

Solution

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{8\sqrt{16\sqrt{2}}} &= \sqrt[4]{2^x} \\ \Rightarrow \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2 \sqrt{\sqrt{2}}} &= \sqrt[4]{2^x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2^5 \sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{2^x}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2^5 \sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{2^x}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{2^x}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{2^x}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt[3]{\sqrt[4]{4^4 \sqrt[4]{2}}} = \sqrt[4]{2^x}$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{2^9} = \sqrt[4]{2^x}$$

$$\Rightarrow 2^4 \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[4]{2^x}$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{2^7} = \sqrt[4]{2^x}$$

$$\Rightarrow x = 7, \text{ 故選(D)}$$

103-01-03

Statement

若 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 8x + 13$ ，則 $f(3 + \sqrt{2}) = ?$

(A) $37 + 18\sqrt{2}$

(B) $47 + 28\sqrt{2}$

(C) $57 + 38\sqrt{2}$

(D) $67 + 48\sqrt{2}$

(E) $77 + 58\sqrt{2}$

Solution

利用綜合除法，轉換成 $x - 3$ 的表示形式

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 1 & -4 & 5 & -8 & 13 & \\
 & 3 & -3 & 6 & -6 & 3 \\
 \hline
 1 & -1 & 2 & -2 & 7 & \\
 & 3 & 6 & 24 & & \\
 \hline
 1 & 2 & 8 & 22 & & \\
 & 3 & 15 & & & \\
 \hline
 1 & 5 & 23 & & & \\
 & 3 & & & & \\
 \hline
 1 & 8 & & & &
 \end{array}$$

得到 $f(x) = (x - 3)^4 + 8(x - 3)^3 + 23(x - 3)^2 + 22(x - 3) + 7$

因此 $f(3 + \sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 + 8(\sqrt{2})^3 + 23(\sqrt{2})^2 + 22(\sqrt{2}) + 7 = 38\sqrt{2} + 57$ ，故選(C)

103-01-04

Statement

若 $f(x) = \frac{2x+1}{3x+a}$ 滿足 $f(f(x)) = x$ ，則 $a = ?$

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 2

Solution

$$f(f(x)) = \frac{2 \cdot \frac{2x+1}{3x+a} + 1}{3 \cdot \frac{2x+1}{3x+a} + a} = \frac{7x+a+2}{(6+3a)x+3+a^2}$$

$$\text{解聯立方程式} \begin{cases} 6+3a=0 \\ a+2=0 \\ 3+a^2=7 \end{cases}$$

得到 $a = -2$ ，故選(A)

103-01-05

Statement

設 $\frac{2x+3}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1}$ ，則 $A - B + C = ?$

(A) -5

(B) $-\frac{5}{2}$

(C) 0

(D) 1

(E) 2

Solution

$$2x + 3 = (x + 1)(Ax + B) + C(x^2 + 1)$$

$$= (A + C)x^2 + (A + B)x + (B + C)$$

$$\text{解聯立方程組, } \begin{cases} A + C = 0 \\ A + B = 2 \\ B + C = 3 \end{cases}, \text{ 得到 } (A, B, C) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{因此 } A - B + C = -3 + \frac{1}{2} = \frac{-5}{2}, \text{ 故選(B)}$$

103-01-06

Statement

$\triangle ABC$ 如下圖，若 $c = 6$ ， $\angle A = 60^\circ$ ， $a + b = 10$ ，則 $a = ?$

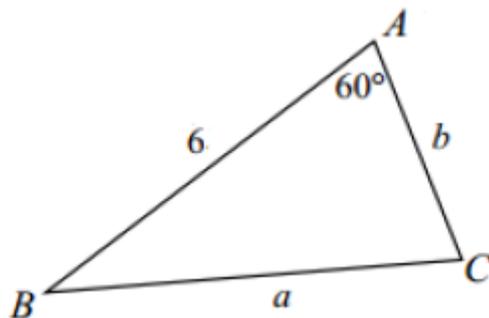
(A) $\frac{29}{7}$

(B) $\frac{32}{7}$

(C) 5

(D) $\frac{38}{7}$

(E) $\frac{41}{7}$



Solution

利用餘弦定理， $a^2 = 6^2 - (10 - a)^2 - 2 \times 6 \times (10 - a) \times \cos 60^\circ$

$$\Rightarrow a^2 = 6^2 + (10 - a)^2 - 6(10 - a)$$

$$\Rightarrow a = \frac{38}{7}, \text{ 故選(D)}$$

103-01-07

Statement

橢圓 $3x^2 + 4y^2 - 16y = 20$ 兩焦點的距離為何？

(A) $\frac{3}{2}$

(B) $\sqrt{3}$

(C) 2

(D) 3

(E) $2\sqrt{3}$

Solution

$$3x^2 + 4y^2 - 16y = 20$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 4(y-2)^2 = 36$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{12} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

可知 $a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ，且 $b = \sqrt{9} = 3$

因此 $c = \sqrt{(\sqrt{12})^2 - (\sqrt{9})^2} = \sqrt{3}$

$2c = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ ，故選(E)

103-01-08

Statement

設 $0 < \theta < \frac{\pi}{8}$ ，則 $\sqrt{2 - \sqrt{2 + 2\cos 4\theta}}$ 可化簡為以下何者？

(A) $\sqrt{2}\sin\theta$

(B) $2\sin\theta$

(C) $\sqrt{2}\cos\theta$

(D) $2\cos\theta$

(E) $\sin 2\theta$

Solution

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 + 2\cos 4\theta}} = \sqrt{2 - \sqrt{4\cos^2(2\theta)}} = \sqrt{2 - 2\cos(2\theta)}$$

$$= \sqrt{4\sin^2\theta} = 2\sin\theta，故選(B)$$

103-01-09

Statement

已知 $f(x) = 2x^4 - 9x^3 - 23x^2 + 81x + 45 = 2(x-3)(x-a)(x-b)(x-c)$ ，則 $a^2 + b^2 + c^2 = ?$

(A) $\frac{65}{4}$

(B) $\frac{67}{4}$

(C) $\frac{137}{4}$

(D) 35

(E) $\frac{145}{4}$

Solution

$$2x^4 - 9x^3 - 23x^2 + 81x + 45 = 2(x-3)(x-a)(x-b)(x-c)$$

$$2x^3 - 3x^2 - 32x - 15 = 2(x-a)(x-b)(x-c)$$

利用偉達定理

$$a + b + c = \frac{3}{2}$$

$$ab + bc + ac = \frac{-32}{2} = -16$$

$$abc = \frac{15}{2}$$

$$\text{因此}(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

$$\frac{9}{4} = a^2 + b^2 + c^2 + 2(-16)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{9}{4} + 32 = \frac{137}{4}, \text{ 故選}(C)$$

103-01-10

Statement

若 $L_1 : x - 2y + 7 = 0$ 與 $L_2 : ax + y + c = 0$ 相互垂直，且 $(-3, 1)$ 在 L_2 上，則 $c = ?$

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6

Solution

$$L_1 : x - 2y + 7 = 0, L_1 \perp L_2$$

$$L_2 : ax + y + c = 0$$

$$m_1 = -\frac{-2}{1} = 2, m_1 \cdot m_2 = -1, \text{ 得到 } m_2 = -\frac{1}{2}$$

因此 $a = 2$

將 $(-3, 1)$ 代入 L_2 ，得 $(-6) + 1 + c = 0$ ，得到 $c = 5$ ，故選(D)。

Statement

不等式 $\frac{x^3 + 4x^2 + 5x - 1}{x - 1} \geq 1$ 的解為何？

- (A) $-2 \leq x < 1$ 或 $1 < x$
 (B) $x \leq -2$ 或 $0 \leq x < 1$
 (C) $0 < x < 1$ 或 $1 < x$
 (D) $x \leq 0$ 或 $1 < x$
 (E) $0 \leq x < 1$

Solution

定義域 $x \neq 1$

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x - 1}{x - 1} &\geq 1 \\ \Rightarrow \frac{x^3 + 4x^2 + 5x - 1}{x - 1} - 1 &\geq 0 \\ \Rightarrow \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x - 1} &\geq 0 \\ \Rightarrow \frac{x(x + 2)^2}{x - 1} &\geq 0 \end{aligned}$$

考慮以下兩種情況

$$\begin{cases} x(x + 2)^2 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [1, \infty)$$

$$\begin{cases} x(x + 2)^2 \leq 0 \\ x - 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, 0]$$

兩者與定義域取交集，得到 $x \leq 0$ 或 $x > 1$ ，故選(D)

Statement

設拋物線 $y^2 = 2x + 6$ 與直線 $x - y - 1 = 0$ ，相交於 $P(a, b)$ 及 $Q(c, d)$ ，其中 $a > c$ ，則 $b - d = ?$

- (A) -6
 (B) -3
 (C) 0
 (D) 3
 (E) 6

Solution

$$x - y - 1 = 0 \Rightarrow y = x - 1$$

$$(x - 1)^2 = 2x + 6$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 5)(x + 1) = 0$$

得到 $x = -1$ 或 $x = 5$

因此 $a = 5, c = -1$

分別代入，得到 $b = 4, d = -2$ ，因此 $b - d = 4 - (-2) = 6$ ，故選 (E)

103-01-13

Statement

求點 $P(0, 2)$ 到拋物線 $y = x^2$ 的最短距離為何？

(A) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

(B) $\sqrt{2}$

(C) $\sqrt{3}$

(D) $\frac{7}{4}$

(E) 2

Solution

設有一動點 $Q(x, x^2)$

$$\text{則 } d = \sqrt{(x - 0)^2 + (x^2 - 2)^2}$$

$$= \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$$

$$= \sqrt{\left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + 4 - \frac{9}{4}}$$

$$= \sqrt{\left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}$$

當 $x^2 = \frac{3}{2}$ ， $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ ，則有最小值 $\sqrt{\frac{7}{4}}$ ，故最短距離為 $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ，故選 (A)

103-01-14

Statement

設 $2^a = 3$ 、 $3^b = 2$ ，則 $(7^a)^b = ?$

(A) 6

(B) 7

(C) 8

(D) 9

(E) 10

Solution

$$2^a = 3, \text{ 則 } a = \log_2 3 = \frac{\log 2}{\log 3}$$

$$3^b = 2, \text{ 則 } b = \log_3 2 = \frac{\log 3}{\log 2}$$

因此 $(7^a)^b = 7^{ab} = 7^{\left(\frac{\log 2}{\log 3} \cdot \frac{\log 3}{\log 2}\right)} = 7^1 = 7$ ，故選(B)

103-01-15

Statement

設 $\sin \theta - 2 \cos \theta = 1$ ， $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ，則 $2 \sin \theta + \cos \theta = ?$

(A) -3

(B) -2

(C) -1

(D) 1

(E) 2

Solution

$$\sin \theta - 2 \cos \theta = 1$$

$$(\sin \theta - 2 \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta - 4 \sin \theta \cos \theta = 1$$

$$= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 3 \cos^2 \theta - 4 \sin \theta \cos \theta = 1$$

$$= 3 \cos^2 \theta - 4 \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$\text{設 } 2 \sin \theta + \cos \theta = A, \text{ 則 } 4 \sin \theta + \cos^2 \theta + 4 \sin \theta \cos \theta = A^2$$

$$\text{因此 } 3 \sin^2 \theta + 1 = A^2 - 4 \sin \theta \cos \theta$$

$$\text{所以 } 3 \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta + 1 = A^2 - 4 \sin \theta \cos \theta + 3 \cos^2 \theta$$

$$\text{因為 } 3 \cos^2 \theta - 4 \sin \theta \cos \theta = 0$$

所以 $3(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 1 = A^2$

也就是 $A^2 = 4$ ，得到 $A = \pm 2$

已知 $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ，所以 $\sin \theta < 0$ 且 $\cos \theta < 0$

故 $A = 2$ 不合，因此 $A = -2$ ，故選(B)

103-01-16

Statement

直線 $3x - 4y = 12$ ， $4x - 3y + 12 = 0$ 與 x 軸所圍三角形的面積為何？

(A) 21

(B) 42

(C) 60

(D) 63

(E) 84

Solution

找兩直線與 x 軸個別的交點，令 $y = 0$ ， $\begin{cases} 3x = 12 & x = 4 \\ 4x + 12 = 0 & x = -3 \end{cases}$

找兩直線交點， $\begin{cases} x - 4y = 12 \\ 4x - 3y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (-12, -12)$

可知底為 $|4 - (-3)| = 7$ ，高為12，因此 $\frac{7 \times 12}{2} = 42$ ，故選(B)

103-01-17

Statement

設圓 $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 3$ 與 x 軸交於 A, B 兩點，且圓心為 C ，則 $\cos(\angle ACB) = ?$

(A) -1

(B) $-\frac{1}{2}$

(C) 0

(D) $\frac{1}{2}$

(E) 1

Solution

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 3$$

利用配方法，得 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$ ，因此圓心為 $(1, -2)$ ，半徑為 $\sqrt{8}$

考慮圓與 x 軸的交點，令 $y = 0$ ，則 $x^2 - 2x = 3$ ，也就是 $(x-3)(x+1) = 0$ ，因此得到 $x = -1$ 與 $x = 3$

利用餘弦定理，可知 $\cos(\angle ACB) = \frac{(\sqrt{8})^2 + (\sqrt{8})^2 - 4^2}{2 \times \sqrt{8} \times \sqrt{8}} = 0$ ，故選(C)

103-01-18

Statement

設 $\vec{a} = \langle 1, 1 \rangle$ ， $\vec{b} = \langle 2, 6 \rangle$ 。

若 $|t\vec{a} + \vec{b}|$ 為最小時， $t = ?$

(A) -10

(B) -8

(C) -6

(D) -4

(E) -2

Solution

$$t\vec{a} + \vec{b} = \langle t, t \rangle + \langle 2, 6 \rangle = \langle 2+t, 6+t \rangle$$

$$\text{因此 } \sqrt{(2+t)^2 + (6+t)^2} = \sqrt{4+4t+t^2+36+12t+t^2} = \sqrt{2t^2+16t+40} = \sqrt{2(t+4)^2+8}$$

故當 $t = -4$ 時，有最小值8，故選(D)

103-01-19

Statement

若 $\log_5(5^x - 125) = \frac{x}{2} + 1 + \log_5 4$ ，則 $x = ?$

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6

Solution

$$\log_5(5^x - 125) = \frac{x}{2} + 1 + \log_5 4$$

$$\Rightarrow \log_5(5^x - 125) - \log_5 4 - \log_5 5 = \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \log_5\left(\frac{5^x - 125}{20}\right) = \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{5^x - 125}{20} = 5^{\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow 5^x - 125 = 20 \times 5^{\frac{x}{2}}$$

$$\text{令 } t = 5^{\frac{x}{2}}, \text{ 則 } t^2 - 125 = 20t$$

解方程式得到 $t = -5$ (不合) 或 $t = 25$

$$5^{\frac{x}{2}} = 25, \text{ 得到 } x = 4, \text{ 故選 } (C)$$

103-01-20

Statement

若 α, β 為 $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$ 之兩根，則 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = ?$

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{5}{4}$

(C) $\frac{7}{4}$

(D) $\frac{9}{4}$

(E) $\frac{11}{4}$

Solution

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2 \sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ 或 } x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{因此 } \cos^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4} + 0 = \frac{3}{4}, \text{ 故選 } (A)$$

103年第2次北科入學數學會考

103-02-01

Statement

若 $f(x) = 12x^2 - 26x + 5$ ，則 $f\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right) = ?$

(A) $-2 + 5\sqrt{2}$

(B) $-1 + 5\sqrt{2}$

(C) $1 + 5\sqrt{2}$

(D) 9

(E) $2 + 5\sqrt{2}$

Solution

利用綜合除法，將式子轉成以 $(2x - 3)$ 表示的形式。

$$\begin{array}{r|rrr} 12 & -26 & 5 & \\ & 18 & -12 & 3/2 \\ \hline 6 & -4 & -7 & \\ & 9 & & \\ \hline 3 & 5 & & \end{array}$$

綠色字：將 $(x - \frac{3}{2})$ 轉換成 $(2x - 3)$ ，因此係數的部分要除以2。

得到 $f(x) = 3(2x - 3)^2 + 5(2x - 3) - 7$ ，因此 $f\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right) = 6 + 5\sqrt{2} - 7 = 5\sqrt{2} - 1$ ，故選(B)

103-02-02

Statement

若 $f\left(\frac{2+x}{4-x}\right) = x + 2$ ，則 $f(a) = ?$

(A) $\frac{6a}{1-a}$

(B) $\frac{2+a}{2-a}$

(C) $\frac{4+a}{2-a}$

$$(D) \frac{2-a}{2+a}$$

$$(E) \frac{6a}{1+a}$$

Solution

$$\frac{2+x}{4-x} = a, \text{ 得到 } x = \frac{4a-2}{a+1}$$

$$\text{因此 } f(a) = \frac{4a-2}{a+1} + 2 = \frac{6a}{a+1}, \text{ 故選}(E)$$

103-02-03

Statement

設 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = 5$ ， $\overline{CA} = 4$ ，若 D 為 \overline{BC} 上一點使 $\overline{AD} = 4$ ，則 $\overline{BD} = ?$

$$(A) 1$$

$$(B) 2$$

$$(C) \frac{5}{2}$$

$$(D) 3$$

$$(E) 4$$

Solution

$$\cos C = \frac{5^2 + 4^2 - 6^2}{2 \times 5 \times 4} = \frac{1}{8}$$

$$\text{可以推得 } \cos C = \cos \angle ACD = \frac{4^2 + (\overline{CD})^2 - 4^2}{2 \times 4 \times \overline{CD}} = \frac{1}{8}, \text{ 可得 } \overline{CD} = 1$$

$$\text{因此 } \overline{BD} = \overline{BC} - \overline{CD} = 5 - 1 = 4, \text{ 故選}(E)$$

103-02-04

Statement

求圓 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ 與直線 $3x - 4y = -7$ 的最近距離為何？

$$(A) 0$$

$$(B) 1$$

$$(C) 2$$

$$(D) 4$$

$$(E) 5$$

Solution

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

利用配方法，得到 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$

因此得到圓心 $(2, -3)$ ，且半徑 $r = \sqrt{16} = 4$

考慮圓心與直線的最近距離，利用點到直線距離公式

$$\frac{|3(2) - 4(-3) + 7|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|25|}{5} = 5$$

長度大於半徑，因此與圓的最近距離為 $5 - 4 = 1$ ，故選(B)

103-02-05

Statement

下列何者錯誤？

(A) $\sin(\pi - x) = \sin x$

(B) $\cos(\pi - x) = -\cos x$

(C) $\tan(\pi + x) = \tan x$

(D) $\csc\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sec x$

(E) $\sec\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \csc x$

Solution

$\csc\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sec(x)$ ，故選(D)

103-02-06

Statement

已知 $f(x) = 3x^5 + 19x^4 - 13x^3 + 6x^2 - 6x + 15$ ，求 $f(-7) = ?$

(A) 4

(B) 5

(C) 6

(D) 7

(E) 8

Solution

$f(-7)$ 結果與 $f(x) \div (x - 7)$ 的餘數等價（餘式定理）。

因此利用綜合除法來找餘數

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 3 & 19 & -13 & 6 & -6 & 15 & \\ & -21 & 14 & -7 & 7 & -7 & \\ \hline 3 & -2 & 1 & -1 & 1 & 8 & \end{array} \quad -7$$

因此 $f(-7) = 8$ ，故選(E)

103-02-07

Statement

設 $f(x) = x^2$ ，若將函數圖形向左平移1個單位，再向上平移 k 個單位後，所得到的圖形通過點 $(-2, 4)$ ，則 $k = ?$

- (A) -5
- (B) -3
- (C) **3**
- (D) 4
- (E) 5

Solution

根據函數圖形平移，平移的結果為 $y = f(x) = (x + 1)^2 + k$

帶入點 $(-2, 4)$ 求 k ，得到 $4 = (-2 + 1)^2 + k$ ，因此 $k = 3$ ，故選(C)

103-02-08

Statement

設雙曲線之方程式為 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ ，若將此雙曲線之貫軸長放大為2倍，共軛軸與中心點不變，則此雙曲線方程式變為何？

- (A) $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$
- (B) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 1$

$$(C) \frac{x^2}{16} - y^2 = 1$$

$$(D) \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{2} = 1$$

$$(E) \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Solution

已知實軸長原先為 $2a = 2\sqrt{4} = 4$ ，放大為兩倍後得到 $2a = 8$ ，因此 $a = 4$ ，所以 $a^2 = 16$

又共軛軸與中心點不變，則此方程式變為 $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$ ，故選(C)

103-02-09

Statement

不等式 $\frac{1 + 2\log_2 x}{-1 + \log_2 x} \leq 1$ 之解為何？

$$(A) \frac{1}{2} \leq x \leq 2$$

$$(B) \frac{1}{2} \leq x < 2$$

$$(C) \frac{1}{4} \leq x \leq 2$$

$$(D) \frac{1}{4} \leq x < 2$$

$$(E) 1 \leq x < 2$$

Solution

$$\frac{1 + 2\log_2 x}{-1 + \log_2 x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1 + 2\log_2 x}{-1 + \log_2 x} - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2 + \log_2 x}{-1 + \log_2 x} \leq 0$$

因此我們考慮以下兩種情況取聯集

$$\begin{cases} 2 + \log_2 x \leq 0 \\ -1 + \log_2 x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\begin{cases} 2 + \log_2 x \leq 0 \\ -1 + \log_2 x < 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\frac{1}{4}, 2\right)$$

兩種情況取聯集，得到 $\frac{1}{4} \leq x < 2$ ，故選(D)

Statement

設 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ ，求 $\cos 4\theta$

(A) $\frac{-1}{4}$

(B) $\frac{-1}{8}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(E) 1

Solution

展開 $\cos 4\theta$ 的式子

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= \cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta \\ &= \cos^2 2\theta - (2 \sin \theta \cos \theta)^2\end{aligned}$$

將 $\sin \theta - \cos \theta$ 平方，得到

$$\begin{aligned}(\sin \theta - \cos \theta)^2 &= \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta &= \frac{1}{4} \\ \Rightarrow 1 - 2 \sin \theta \cos \theta &= \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \sin \theta \cos \theta &= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

求 $\sin^2 2\theta$

$$\sin^2 2\theta = \left(\frac{6}{8}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

求 $\cos^2 2\theta$

$$\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1, \quad \cos^2 2\theta = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

計算 $\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta$

$$\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta = \frac{7}{16} - \frac{9}{16} = \frac{-2}{16} = \frac{-1}{8}$$

因此 $\cos 4\theta = \frac{-1}{8}$ ，故選 (B)

103-02-11

Statement

若直線通過點 $P(3, 4)$ 且與兩座標軸在第一象限圍成三角形，則此三角形面積最小值為何？

- (A) 10
- (B) 12
- (C) 14
- (D) 20
- (E) 24

Solution

設直線截距式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ，三角形面積為 $\frac{ab}{2}$

因為與第一象限圍成區域面積，所以 $a, b > 0$

代入點 $P(3, 4)$ 得到 $\frac{3}{a} + \frac{4}{b} = 1$

利用算幾不等式， $\frac{\frac{3}{a} + \frac{4}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{12}{ab}}$ ，解得 ab 最小值為48

因此 $\frac{48}{2} = 24$ ，故選(E)

103-02-12

Statement

已知兩圓 $x^2 + y^2 = 10$ 與 $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 5$ 有兩交點，則此兩交點的距離為何？

- (A) 3
- (B) 4
- (C) $\sqrt{26}$
- (D) $\sqrt{35}$
- (E) $5\sqrt{2}$

Solution

利用配方法，可知 $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 5 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 10$

設圓心 $O_1 = (0, 0)$ ， $O_2 = (1, -2)$ ，且兩圓交於 A, B ，其中 $\overline{O_1A} = \overline{O_1B} = \overline{O_2A} = \overline{O_2B} = \sqrt{10}$

已知 $\angle AO_1B + \angle O_1AO_2 = 180^\circ$

因此 $\cos(\angle O_1AO_2) = \cos(\pi - \angle AO_1B) = -\cos(\angle AO_1B)$

$$\text{因此 } \frac{(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 - (\overline{AB})^2}{2 \times \sqrt{10} \times \sqrt{10}} = -\frac{(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \times \sqrt{10} \times \sqrt{10}}$$

可知 $\overline{AB} = \pm\sqrt{35}$ (負不合), 故選(D)

103-02-13

Statement

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + 25 \times 26 = ?$$

(A) 5125

(B) 5850

(C) 6500

(D) 6975

(E) 7200

Solution

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + 25 \times 26$$

$$= \sum_{x=1}^{25} x(x+1) = \sum_{x=1}^{25} (x^2 + x) = \sum_{x=1}^{25} x^2 + \sum_{x=1}^{25} x$$

$$= \frac{25(25+1)(50+1)}{6} + \frac{25 \times 26}{2}$$

$$= 25 \times 13 \times 17 + 25 \times 13$$

$$= 5525 + 325 = 5850, \text{ 故選(B)}$$

103-02-14

Statement

設曲線 $y = \log_3 x$ 與 x 軸、直線 $x = 9$ 的交點分別為 A 、 B ，且直線 $x = 9$ 與 x 軸的交點為 C ，則 $\triangle ABC$ 的面積為何？

(A) 8

(B) 12

(C) 16

(D) 18

(E) 24

Solution

設 $y = 0$ ，則 $y = \log_3 x$ 可知 $x = 1$ ，因此 $A = (1, 0)$

設 $x = 9$ ，則 $y = \log_3 x$ 可知 $y = 2$ ，因此 $B = (9, 2)$

$x = 9$ 與 x 軸的交點為 $(9, 0)$

因此可知底為 $(9 - 1) = 8$ ，高為 $2 - 0 = 2$ ，因此面積為 $\frac{2 \times 8}{2} = 8$ ，故選(A)

103-02-15

Statement

若 $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 6x + 8}$ ，則 $g(x)$ 的值域為何？

(A) $[2, 4]$

(B) $[2, \infty)$

(C) $[-1, \infty)$

(D) $(-\infty, \infty)$

(E) $(-\infty, 2] \cup [4, \infty)$

Solution

$x^2 - 6x + 8 \Rightarrow (x - 3)^2 - 1$ ，可知 $x = 3$ 時有最小值 -1

又 $\sqrt[3]{-1} = -1$ ，因此 $g(x)$ 的值域為 $[-1, \infty)$ ，故選(C)

103-02-16

Statement

設 $10 < x < 100$ ，且 $\log x$ 與 $\log \frac{1}{x}$ 的尾數相同，則 $x = ?$

(A) $10\sqrt{2}$

(B) 20

(C) $10\sqrt{6}$

(D) $10\sqrt{8}$

(E) $10\sqrt{10}$

Solution

$\log \frac{1}{x} = -\log x$ ，兩式要尾數要相同的情況下為尾數為0或尾數為0.5

考慮五個選項，可知 $10\sqrt{10} = 10^{\frac{3}{2}}$

$\log 10^{\frac{3}{2}} = 1.5$ ，又 $-\log 10^{\frac{3}{2}} = -1.5$

因此尾數為0.5，故選(E)

103-02-17

Statement

$\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{BC} = 5$ ， $\cos \angle B = -\frac{5}{13}$ ，令 S 為 $\triangle ABC$ 的面積，則下列何者正確？

- (A) $S < 8$
- (B) $8 \leq S < 9$
- (C) $9 \leq S < 10$
- (D) $10 \leq S < 11$
- (E) $11 \leq S$

Solution

$$\cos \angle B = -\frac{5}{13} \text{ 可知 } \sin \angle B = \frac{12}{13}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{12}{13} = \frac{120}{13}$$

因此 $9 \leq S < 10$ ，故選(C)

103-02-18

Statement

設 $\vec{a} = \langle \cos \alpha, \sin \alpha \rangle$ ， $\vec{b} = \langle \cos \beta, \sin \beta \rangle$ ，且 $0 < \alpha < \pi$ ， $0 < \beta < \pi$ ， $\alpha \neq \beta$ ，則兩向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 與 $\vec{a} - \vec{b}$ 的夾角為何？

- (A) 0
- (B) $\frac{\pi}{4}$
- (C) $\frac{\pi}{3}$
- (D) $\frac{\pi}{2}$
- (E) π

Solution

由題目可知，兩向量是以原點為起點，單位圓上為終點做兩向量。

若任意取圓上兩點 B, C ，則向量 \vec{a} 為原點至點 B 的向量，且向量 \vec{b} 為原點至點 C 的向量。

因此根據向量平行四邊形，可知 $\vec{a} + \vec{b}$ 為 $\angle CAB$ 的角平分向量，且 $\vec{a} - \vec{b}$ 為 \vec{CB}

由三角形的角平分線性質可知 \overline{CB} 會被分成兩段

再由圓性質，過圓心的一射線能將圓上任意兩點等分，則射線跟線段一定為直角，故選(D)

103-02-19

Statement

$$\text{求} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{3x-1}{2x+1} - \frac{2}{3}}{x-1} = ?$$

(A) $\frac{1}{9}$

(B) $\frac{2}{9}$

(C) $\frac{1}{3}$

(D) $\frac{4}{9}$

(E) $\frac{5}{9}$

Solution

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{3x-1}{2x+1} - \frac{2}{3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5x-5}{6x+3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{6x+3} = \frac{5}{9}, \text{ 故選}(E)$$

103-02-20

Statement

$$\text{若} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = \frac{-1}{4}, \text{ 求} a+b = ?$$

(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 6

(E) 7

Solution

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax+b-4}{x(\sqrt{ax+b}+2)}$$

若極限存在，則 $b-4=0$ ，因此 $b=4$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{x(\sqrt{ax+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{(\sqrt{ax+4}+2)} = \frac{-1}{4}$$

得到 $\frac{a}{4} = \frac{-1}{4}$ ，因此 $a = -1$

因此 $a+b = 4-1 = 3$ ，故選(A)

104年第1次北科入學數學會考

104-01-01

Statement

若 $f(x) = 18x^3 - 15x^2 - 4x - 3$ ，則 $f\left(\frac{2-\sqrt{3}}{3}\right) = ?$

(A) $-3\sqrt{3}$

(B) $-2\sqrt{3}$

(C) $2 - \sqrt{3}$

(D) $2 + \sqrt{3}$

(E) $2\sqrt{3}$

Solution

將式子轉成以 $(3x - 2)$ 來表達的形式。

$$\begin{array}{r|rrrr} 18 & -15 & -4 & -3 & \\ & 12 & -2 & -4 & 2/3 \\ \hline 6 & -1 & -2 & -7 & \\ & 4 & 2 & & \\ \hline 2 & 1 & & 0 & \\ & 4/3 & & & \\ \hline 2/3 & 7/3 & & & \end{array}$$

得到 $f(x) = \frac{2}{3}(3x - 2)^3 + \frac{7}{3}(3x - 2)^2 - 7$

因此 $f\left(\frac{2-\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{3}(-\sqrt{3})^3 + \frac{7}{3}(-\sqrt{3})^2 - 7 = -2\sqrt{3}$ ，故選(B)

104-01-02

Statement

設 α, β 為方程式 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 之兩根，且 $\alpha > \beta$ ，則 $\alpha^2 - \beta^2 = ?$

(A) $\sqrt{13}$

(B) $\frac{3}{2}\sqrt{13}$

(C) $2\sqrt{13}$

(D) $3\sqrt{13}$

(E) $4\sqrt{13}$

Solution

利用根與係數，可知：

$$\alpha\beta = \frac{-1}{1} = -1, \text{ 可知 } \alpha = \frac{-1}{\beta}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{-3}{1} = 3$$

$$\text{因此 } \frac{-1}{\beta} + \beta = 3 \Rightarrow \beta^2 - 3\beta - 1 = 0$$

$$\text{解方程式可知 } \beta = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}, \text{ 由於 } \alpha > \beta, \text{ 因此正不合, 故 } \beta = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}。$$

$$\text{可知 } \alpha = \frac{-2}{3 - \sqrt{13}}$$

$$\text{因此 } \alpha^2 - \beta^2 = \frac{4}{22 - 6\sqrt{13}} - \frac{22 - 6\sqrt{13}}{4} = 3\sqrt{13}, \text{ 故選(D)}$$

104-01-03

Statement

$$2 \cdot 11^5 - 23 \cdot 11^4 + 13 \cdot 11^3 - 25 \cdot 11^2 + 40 \cdot 11 - 56 = ?$$

(A) -77

(B) -35

(C) 17

(D) 21

(E) 63

Solution

$$\text{將式子轉成 } f(x) = 2x^5 - 23x^4 + 13x^3 - 25x^2 + 40x - 56$$

且 x 代入11之結果，等價於 $f(x) \div (x - 11)$ 之餘數（餘式定理）

因此，利用綜合除法來計算。

$$\begin{array}{r}
 2 \quad -23 \quad 13 \quad -25 \quad 40 \quad -56 \\
 \quad \quad 22 \quad -11 \quad 22 \quad -33 \quad 77 \\
 \hline
 2 \quad -1 \quad 2 \quad -3 \quad 7 \quad 21
 \end{array}
 \Bigg| 11$$

因此， $f(11) = 21$ ，故選(D)

104-01-04

Statement

設 $\frac{5x^3 - 9x^2 + 9x - 3}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ ，則 $A+B+C+D=?$

(A) -4

(B) -1

(C) 4

(D) 6

(E) 8

Solution

$$5x^3 - 9x^2 + 9x - 3 = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2$$

將 $x=1$ 代入式子，可得 $2 = 2B$ ，因此 $B=1$

$$5x^3 - 10x^2 + 9x - 4 = A(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 5x + 4 = A(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 5x + 4 = Ax^2 + A + Cx^2 - Cx + Dx - D$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 5x + 4 = (A+C)x^2 + (-C+D)x + (A-D)$$

$$\text{可知} \begin{cases} (A+C) = 5 \\ (-C+D) = -5 \\ (A-D) = 4 \end{cases}, \text{解聯立方程式得到 } (A, C, D) = (2, 3, -2)$$

因此 $A+B+C+D = 2+1+3+(-2) = 4$ ，故選(C)

104-01-05

Statement

不等式 $\sqrt[3]{(x-2)^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} \leq 0$ 之解為何？

(A) $1 \leq x < 2$

(B) $2 < x \leq 3$

(C) $1 < x < 2$

(D) $x \geq 3$ 或 $x < 2$

(E) $2 < x < 3$

Solution

令 $t = \sqrt[3]{x-2}$ ，則 $t^2 - \frac{1}{t} \leq 0$

得到 $\frac{t^3 - 1}{t} \leq 0$ ，定義域 $t \neq 0$

考慮以下兩種情況

$$\begin{cases} t^3 - 1 \leq 0 \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow t \in (0, 1]$$

$$\begin{cases} t^3 - 1 \geq 0 \\ t < 0 \end{cases} \Rightarrow t \in \emptyset$$

故 $0 < t \leq 1$ 時 $t^2 - \frac{1}{t} \leq 0$

還原 t ，可得 $2 < t \leq 3$ 時， $\sqrt[3]{(x-2)^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} \leq 0$ ，故選(B)

104-01-06

Statement

設 $x^2 + 1$ 為 $x^4 + 2x^3 + mx^2 + nx + 3$ 的因式，則 $m + n = ?$

(A) 4

(B) 5

(C) 6

(D) 7

(E) 8

Solution

利用長除法

104-01-08

Statement

設兩向量 \vec{a} 、 \vec{b} 的夾角為 θ ， $|\vec{a}| = 3$ 、 $|\vec{b}| = 2$ 且 $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{37}$ ，則 $\theta = ?$

(A) 0

(B) $\frac{\pi}{6}$

(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{3}$

(E) $\frac{\pi}{2}$

Solution

$$|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 4|\vec{b}|^2 = 37$$

$$\text{可知}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 3 = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$$

$$\text{因此} \cos \theta = \frac{1}{2}, \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} (0 \leq \theta \leq \pi), \text{故選}(D)$$

104-01-09

Statement

設向量 $\vec{a} = \langle 14, -1 \rangle$ ， $\vec{b} = \langle 2^x, 4^{x-1} - 8 \rangle$ ，且 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，則 $x = ?$

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 2

Solution

$$\vec{a} \perp \vec{b}, \text{可知} \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\text{因此} 14 \cdot 2^x - (4^{x+1} - 8) = 0$$

$$\text{所以} 14 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{2x} + 8 = 0$$

$$\text{令} t = 2^x, \text{則} 14t - 4t^2 + 8 = 0, \text{解方程式得到} t = -\frac{1}{2} (\text{不合}) \text{或} t = 4$$

$$\text{因此} 2^x = 4, \text{得} x = 2, \text{故選}(E)$$

104-01-10

Statement

若橢圓以 $(-3, 1)$ 與 $(5, 1)$ 兩焦點，且通點 $(1, -3)$ ，則橢圓長軸為何？

- (A) 10
- (B) $8\sqrt{2}$
- (C) $10\sqrt{2}$
- (D) 16
- (E) 20

Solution

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$

$$\text{因此 } \sqrt{(-3-1)^2 + (1-(-3))^2} + \sqrt{(5-1)^2 + (1-(-3))^2} = 2a$$

可知 $4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 2a$ ，因此 $2a = 8\sqrt{2}$ ，可知長軸為 $8\sqrt{2}$

104-01-11

Statement

若拋物線方程式為 $y = \frac{1}{8}x^2 + 1$ ，且其焦點坐標為 (a, b) ，則 $a + b = ?$

- (A) -2
- (B) -1
- (C) 2
- (D) 3
- (E) 5

Solution

轉換成拋物線的標準式，得到 $x^2 = 8(y - 1)$

因此可知 $4c = 8$ ，得到 $c = 2$

可以從標準式中可以知道頂點為 $(0, 1)$ ，拋物線為開口向上之拋物線

因此焦點坐標為 $(0, 1 + 2) = (0, 3)$

可知 $a = 0$ ， $b = 3$ ，因此 $a + b = 3$ ，故選(D)

104-01-12

Statement

若雙曲線方程式為 $2xy - 6x + 4y = 13$ ，則其中心點坐標為何？

- (A) $(-4, 2)$
- (B) $(-2, 3)$
- (C) $(1, -2)$
- (D) $(3, -2)$
- (E) $(2, 1)$

Solution

$$2xy - 6x + 4y = 13$$

$$\Rightarrow 2(xy - 3x + 2y) = 13$$

$$\Rightarrow 2((x + 2)(y - 3)) = 13$$

因此中心坐標 $(x, y) = (-2, 3)$ ，故選(B)

104-01-13

Statement

若 $\log_2 x = \log_x 16$ ，且其解為 $x = a$ 或 $x = b$ ，則 $a + b = ?$

- (A) -1
- (B) $\frac{3}{2}$
- (C) 2
- (D) 3
- (E) $\frac{17}{4}$

Solution

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 2} = \frac{\log_2 16}{\log_2 x}, \text{ 可以得到 } (\log_2 x)^2 = 4, \text{ 可以得到 } \log_2 x = \pm 2$$

可以得到 $\log_2 x = 2$ ， $\log_2 x = -2$

$$\text{得到 } x = 4 \text{ 或 } x = \frac{1}{4}, \text{ 因此 } a + b = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

Statement

若 $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$ 且 $f(a) = 2$ 、 $f(b) = 3$ ，則 $f(a+b) = ?$

- (A) $\frac{1}{4}$
 (B) $\frac{7}{5}$
 (C) $\frac{5}{2}$
 (D) 5
 (E) 12

Solution

$$f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} = \frac{2^{2x} + 1}{2^{2x} - 1}$$

$$\text{因此 } f(a+b) = \frac{2^{a+b} + 2^{-(a+b)}}{2^{a+b} - 2^{-(a+b)}} = \frac{2^a 2^b + \frac{1}{2^a 2^b}}{2^a 2^b - \frac{1}{2^a 2^b}} = \frac{4^a 4^b + 1}{4^a 4^b - 1}$$

$$\frac{4^a + 1}{4^a - 1} = 2, \text{ 可以得到 } 4^a = 3$$

$$\frac{4^b + 1}{4^b - 1} = 3, \text{ 可以得到 } 4^b = 2$$

$$\text{因此 } f(a+b) = \frac{6+1}{6-1} = \frac{7}{5}, \text{ 故選(B)}$$

Statement

$\log_2 \frac{4\sqrt{3}}{3} + \log_4 12 = ?$

- (A) $\frac{1}{2}$
 (B) $\frac{3}{2}$
 (C) 2
 (D) $\frac{5}{2}$
 (E) 3

Solution

$$\begin{aligned} & \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{3} + \log_4 12 \\ &= \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \log_2 12 \\ &= \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{3} + \log_2 \sqrt{12} \\ &= \log_2 \frac{4 \cdot 6}{3} = \log_2 8 = 3, \text{ 故選}(E) \end{aligned}$$

104-01-16

Statement

設 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ，且 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{-1}{5}$ ，則 $\tan \theta = ?$

(A) $-\frac{12}{5}$

(B) $-\frac{4}{3}$

(C) -1

(D) $-\frac{3}{4}$

(E) $-\frac{5}{12}$

Solution

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{25}$$

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = 2 - \frac{1}{25} = \frac{49}{25}$$

$$(\sin \theta - \cos \theta) = \pm \frac{7}{5} \text{ (負不合)}$$

解聯立方程式，可以知道 $\begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = \frac{-1}{5} \\ \sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{5} \end{cases}$ ，可以得到 $(\sin \theta, \cos \theta) = (\frac{3}{5}, \frac{-4}{5})$ 。

因為 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ，所以 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{-4}{5}} = -\frac{3}{4}$ ，故選(D)

104-01-17

Statement

設 $t = \tan \frac{\theta}{2}$ ，則 $\frac{1}{2 - \cos \theta} = ?$

(A) $\frac{t^2 - 1}{3t^2 - 1}$

(B) $\frac{t^2 + 1}{3t^2 + 1}$

(C) $\frac{3t^2 - 1}{t^2 + 1}$

(D) $\frac{t}{2t^2 + 2}$

(E) $\frac{t + 1}{2t^2 + 2}$

Solution

因為 $\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$

所以 $\frac{1}{2 - \cos \theta} = \frac{1}{2 - \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} = \frac{1 + t^2}{1 + 3t^2}$ ，故選 (B)

104-01-18

Statement

在 xy 平面上，曲線 $3|x - 2| + |2y + 1| = 6$ 所圍區域的面積為何？

(A) 12

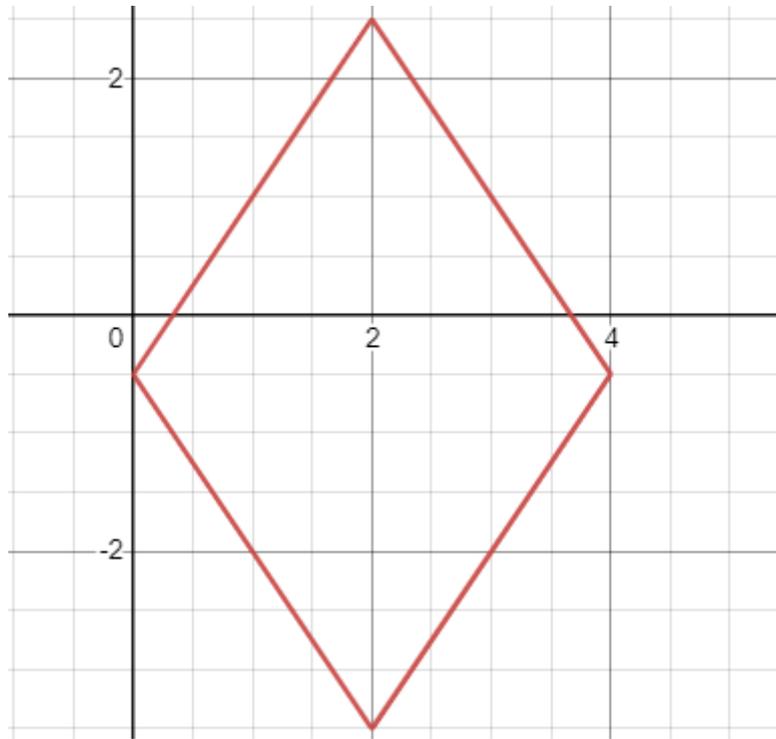
(B) 13

(C) 14

(D) 15

(E) 16

Solution



令 $2y + 1 = 0$, $y = -\frac{1}{2}$, 可以得到 $3|x - 2| = 6$, 可以得到 $x = 4$ 或 $x = 0$, 得到 $\Delta_x = 4$

令 $x - 2 = 0$, $x = 2$, 可以得到 $|2y + 1| = 6$, 可以得到 $y = -\frac{7}{2}$ 或 $y = \frac{5}{2}$, 得到 $\Delta_y = 6$

因此 $\frac{4 \times 6}{2} = 12$, 故選(A)

104-01-19

Statement

若 (a, b) 滿足 $2x + 3y = 1$, 則 $a^2 + b^2$ 的最小值為何?

- (A) $\frac{1}{13}$
- (B) $\frac{1}{\sqrt{13}}$
- (C) $\frac{1}{\sqrt{5}}$
- (D) $\frac{1}{2}$
- (E) 1

Solution

$$2a + 3b = 1$$

利用柯西不等式 $(2^2 + 3^2)(a^2 + b^2) \geq (2a + 3b)^2$

可知 $13(a^2 + b^2) \geq 1^2$, 可知 $(a^2 + b^2) \geq \frac{1}{13}$, 故選(A)

Statement

若點 A 在圓 $x^2 + y^2 = 8y$ 上，且點 B 在圓 $y^2 = x(6 - x)$ 上，則 \overline{AB} 長度的最大值為何？

(A) 10

(B) 11

(C) 12

(D) 13

(E) 14

Solution

點 A 在 $x^2 + (y - 4)^2 = 4^2$ ，圓心 $(0, 4)$

點 B 在 $(x - 3)^2 + y^2 = 3^2$ ，圓心 $(3, 0)$

兩圓圓心距離 $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，則兩圓相交。

因此 \overline{AB} 最大值為 $3 + 5 + 4 = 12$ ，故選(C)

104年第2次北科入學數學會考

104-02-01

Statement

已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle BCA = 120^\circ$ ， $\overline{AC} = 3$ ， $\overline{BC} = 5$ 且 D 在 \overline{AB} 上。

若 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ，則 $\overline{CD} = ?$

- (A) $\frac{5\sqrt{3}}{14}$
- (B) $\frac{15\sqrt{3}}{14}$
- (C) $\frac{35\sqrt{3}}{2}$
- (D) $\frac{55\sqrt{3}}{2}$
- (E) $\frac{75\sqrt{3}}{2}$

Solution

利用餘弦定理求 \overline{AB}

$$\cos 120^\circ = \frac{5^2 + 3^2 - (\overline{AB})^2}{2 \times 5 \times 3} = -\frac{1}{2}, \text{ 可以算出 } \overline{AB} = \pm 7 \text{ (負不合)}。$$

利用正弦來算出面積

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin 120^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \times 7 \times \overline{CD}$$

因此可以求出 $\overline{CD} = \frac{15\sqrt{3}}{14}$ ，故選(B)

104-02-02

Statement

設 $\frac{7x^2 - 13x}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$ ，則 $A + B + C = ?$

- (A) 2
- (B) 4
- (C) 6
- (D) 8
- (E) 10

Solution

$$\begin{aligned}\frac{7x^2 - 13x}{x^3 - x^2 - x + 1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} \\ \Rightarrow \frac{7x^2 - 13x}{(x-1)^2(x+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} \\ \Rightarrow 7x^2 - 13x &= A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 \\ \text{代入 } x=1, \text{ 得 } 2B &= -6, \text{ 因此 } B = -3 \\ 7x^2 - 10x + 3 &= A(x-1)(x+1) + C(x-1)^2 \\ \text{代入 } B = -3, \text{ 得 } 4C &= 20, \text{ 因此 } C = 5 \\ 2x^2 - 2 &= A(x-1)(x+1) = A(x^2 - 1), \text{ 可得 } A = 2 \\ \text{因此 } A + B + C &= 2 - 3 + 5 = 4, \text{ 故選 } (B)\end{aligned}$$

104-02-03

Statement

若扇形的夾角為 θ ，弧長為 $\frac{\pi}{2}$ ，面積為 $\frac{3}{2}\pi$ ，則 $\theta = ?$

- (A) $\frac{\pi}{12}$
- (B) $\frac{\pi}{10}$
- (C) $\frac{\pi}{8}$
- (D) $\frac{\pi}{6}$
- (E) $\frac{\pi}{3}$

Solution

由弧長為 $\frac{\pi}{2}$ 可知， $r\theta = \frac{\pi}{2}$

由面積為 $\frac{3\pi}{2}$ 可知， $\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{3}{2}\pi$

$$\text{兩式} \begin{cases} r\theta = \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{3}{2}\pi \end{cases} \text{ 可知， } r = 6 \text{ 且 } \theta = \frac{\pi}{12}, \text{ 故選 } (A)$$

104-02-04

Statement

設 P 點在圓 $x^2 + y^2 = 6x + 8y$ 上，則 P 與直線 $3x + 4y + 5 = 0$ 最大距離為何？

- (A) 10
- (B) 11

(C) $\frac{56}{5}$

(D) 12

(E) $\frac{66}{5}$

Solution

利用配方法，可以得到圓方程式為 $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ ，因此圓心為 $(3, 4)$ ，半徑為 $\sqrt{25} = 5$

利用點到直線距離公式，可以知道 $\frac{|3 \times 3 + 4 \times 4 + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|30|}{5} = 6$

因此最大距離為 $6 + 5 = 11$ ，故選(B)

104-02-05

Statement

下列各三角等式何者正確？

(A) $\cos(x + y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

(B) $\sin 2x = 2 \sin x$

(C) $\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x + y) \sin(x - y)$

(D) $\sin(\pi - x) = \cos x$

(E) $\cos 2x = 1 + 2 \sin^2 x$

Solution

(A) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

(B) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

(D) $\sin(\pi - x) = \sin x$

(E) $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$

故選(C)

104-02-06

Statement

若多項式 $ax^3 + 8x^2 + bx + 10$ 可被 $x + 1$ 與 $x - 2$ 整除，則 $a - b = ?$

(A) -44

(B) -22

(C) -11

(D) 22

(E) 44

Solution

根據餘式定理，可以列出以下兩個式子

$$\begin{cases} -a - b = -18 \\ 8a + 2b = -42 \end{cases}$$

解聯立後得到 $(a, b) = (-13, 31)$ ，因此 $a - b = -44$ ，故選(A)

104-02-07

Statement

已知兩點 $A(3, 0)$ ， $B(1, 1)$ ，若 $C(a, b)$ 為直線 $y = -1$ 上一點使得 $\overline{AC} + \overline{BC}$ 最小，則 $3a + b = ?$

(A) -1

(B) 0

(C) 2

(D) 3

(E) 6

Solution

已知 A, B 兩點皆同側於 $y = -1$ 。

因此我們假設一點 $A'(3, -2)$ 使其與 A 點映射於 $y = -1$ ，且 A' 與 B 異側。

因此 $\overline{A'B}$ 與 $y = -1$ 之交點即為 C 點。

$$\text{可知 } \overline{A'B}: y - 1 = \frac{-2 - 1}{3 - 1}(x - 1) \Rightarrow 3x + 2y = 5$$

$$\text{代入 } y = -1 \text{ 可得 } x = \frac{7}{3}, \text{ 因此 } C = \left(\frac{7}{3}, -1\right)$$

因此 $3a + b = 7 + (-1) = 6$ ，故選(E)

104-02-08

Statement

已知雙曲線方程式為 $2xy - 4x + 3y = 5$ ，則雙曲線中心點坐標為何？

(A) $(-2, 3)$

(B) $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$

(C) $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$

(D) $(2, -3)$

(E) $(4, -3)$

Solution

$$2xy - 4x + 3y = 5$$

透過配方法，可得到 $2\left(x + \frac{3}{2}\right)(y - 2) = -1$

因此中心點坐標為 $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$ ，故選(B)

104-02-09

Statement

方程式 $x + |\log_2 x| = 1$ 有幾個實數解？

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

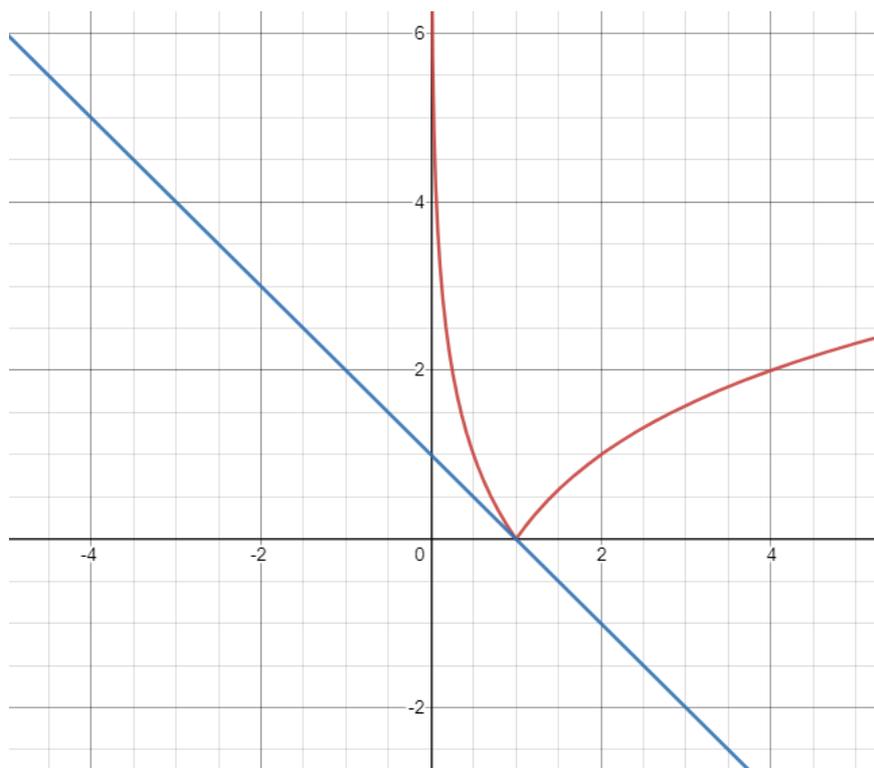
(E) 4

Solution

方程式 $x + |\log_2 x| = 1$ 有幾個實數解？

$$x + |\log_2 x| = 1 \Rightarrow |\log_2 x| = 1 - x$$

畫出圖



可以知道有一個交點，故選(B)。

104-02-10

Statement

設 $\sin x - 2 \cos x = \sqrt{5}$ ，則 $\sin x + 2 \cos x = ?$

(A) -1

(B) $\frac{-3}{\sqrt{5}}$

(C) 0

(D) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

(E) 1

Solution

$$\sin x - \sqrt{5} = 2 \cos x$$

$$\Rightarrow \sin x - \sqrt{5} = 2\sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x - 2\sqrt{5} \sin x + 5 = 4(1 - \sin^2 x)$$

$$\Rightarrow 5 \sin^2 x - 2\sqrt{5} \sin x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{5} \sin x - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ (負不合)}$$

$$\Rightarrow \cos x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ (正不合)}$$

因此 $\sin x + 2 \cos x = \frac{-3}{\sqrt{5}}$ ，故選(B)

104-02-11

Statement

設 x, y 均為小於100的正整數，且 $3x + 2y = 100$ ，則 (x, y) 有幾組解？

(A) 11

(B) 16

(C) 33

(D) 40

(E) 50

Solution

考慮 x 必定為偶數，又 x 之上限為32

考慮 $x = 2$ ，則 $y = 47 < 100$ ，合理

考慮 $x = 32$ ，則 $y = 2 < 100$ ，合理

因此共有16組解，故選(B)

104-02-12

Statement

若兩圓 $x^2 + y^2 - 8x + 4y = k$ 與 $x^2 + y^2 = 2y$ 所圍重疊區域面積最大，則 k 的最小值為何？

(A) 15

(B) 16

(C) 17

(D) 18

(E) 19

Solution

透過配方法，可以知道

$$\text{圓1為}(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = k + 20$$

$$\text{圓2為}x^2 + (y + 1)^2 = 1$$

$$\text{因此}O_1 = (4, -2)\text{且}O_2 = (0, 1), \overline{O_1O_2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

所圍重疊面積最大，因此考慮圓1能夠完全覆蓋圓2之最小半徑

$$\text{也就是}r = 5 + 1 = 6$$

$$\text{因此}r^2 = 36 = k + 20, \text{因此得到}k = 16, \text{故選}(B)$$

104-02-13

Statement

若 $1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{99} < x_{100} = 10$ 且 $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_{100} - x_{99}$ ，則 $x_{50} = ?$

(A) 3.5

(B) 4

(C) 4.5

(D) 5

(E) 5.5

Solution

由此可知，此數列為一等差數列

因此 $x_0 = 1, x_{100} = 10$ 且項數為101，可求得公差為0.09

因此 $x_{50} = x_1 + (51 - 1)(0.09) = 1 + 4.5 = 5.5$ ，故選(E)

104-02-14

Statement

不等式 $2^{2x+1} - 7 \cdot 2^x - 4 \geq 0$ 的解集合為何？

(A) $(-\infty, -1]$

(B) $(-1, 2]$

(C) $[-1, 2]$

(D) $[-1, 2)$

(E) $[2, \infty)$

Solution

$$2^{2x+1} - 7 \cdot 2^x - 4 \geq 0$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 4 \geq 0$$

令 $t = 2^x$ ，則 $2t^2 - 7t - 4 \geq 0$

因此 $(2t + 1)(t - 4) \geq 0$ ，得到 $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [4, \infty)$

由於 2^x 的域值為正整數，因此 $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ 不合，考慮 $[4, \infty)$

可知 $t \geq 4$ ，還原後得到 $x \geq 2$ ，故選(E)

104-02-15

Statement

若 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$ ， $g(x) = \sqrt{x-3}$ ，則 f 與 g 的合成函數 $f \circ g$ 的定義域為何？

(A) $(3, 4)$

(B) $[3, 4]$

(C) $(3, 19)$

(D) $[3, 19)$

(E) $(3, 19]$

Solution

$$f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{4 - \sqrt{x-3}}}$$

考慮 $\sqrt{4 - \sqrt{x-3}} \neq 0$ ，則 $x \neq 19$

考慮 $4 - \sqrt{x-3} > 0$ ，則 $x < 19$

考慮 $\sqrt{x-3} \geq 0$ ，則 $x \geq 3$

三者取交集，得到 $[3, 19)$ ，故選(D)

104-02-16

Statement

在 $\triangle ABC$ 中，向量 $\vec{AB} = \langle 1, 2 \rangle$ ， $\vec{AC} = \langle x-1, x \rangle$ ， $x > 0$ ，若 $\triangle ABC$ 之面積為 $\frac{5}{2}$ ，則 $x = ?$

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 5

(E) 7

Solution 1

速解 by Trava

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x-1 & x \end{vmatrix} = \frac{5}{2}$$

因此 $5 = |x - 2x + 2|$

$$\Rightarrow 5 = |-x + 2|$$

由於 $x > 0$ ，所以 $-5 = -x + 2$ ，得到 $x = 7$ ，故選(E)

Solution 2

很仔細的解 by Uriah

考慮到以 \vec{AB} 與 \vec{AC} 所建立的平行四邊形，其面積為 $|\vec{AB}||\vec{AC}|\sin\theta$

$$\text{又 } \cos\theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}||\vec{AC}|}，\text{ 因此 } \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

$$\text{可得三角形的面積為 } \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{也就是 } \sqrt{5(2x^2 - 2x + 1) - (9x^2 - 6x + 1)} = 5$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 25，\text{ 得到 } x = -3(\text{不合}) \text{ 或 } x = 7，\text{ 故選(E)}$$

Statement

若 $f(x) = 2x + 1$ 且 $f(g(x)) = 6x + 9$ ，則 $g(x) = ?$

(A) $3x - 4$

(B) $3x + 4$

(C) $4x - 3$

(D) $4x + 3$

(E) $8x + 10$

Solution

設 $g(x) = ax + b$ ，則 $f(g(x)) = 2(ax + b) + 1$

得到 $2ax + 2b + 1 = 6x + 9$

可得 $a = 3$ 與 $b = 4$

因此 $g(x) = 3x + 4$ ，故選(B)

Statement

若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-3}{x} = \frac{-1}{6}$ ，則 $ab = ?$

(A) -9

(B) -3

(C) 1

(D) 3

(E) 9

Solution

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax+b-9}{x(\sqrt{ax+b}+3)}$$

如果極限存在，則 $b - 9$ 必須要等於0，因此 $b = 9$

$$\text{故} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{(\sqrt{ax+9}+3)} = \frac{-1}{6}$$

得到 $a = -1$ ，此 $ab = (-1) \cdot 9 = -9$ ，故選(A)

Statement

設 $f(x) = \frac{x}{2x-1}$ ，則 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} = ?$

- (A) -2
 (B) -1
 (C) $\frac{-1}{2}$
 (D) $\frac{1}{2}$
 (E) 1

Solution

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} = 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} = 2f'(1)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(2x-1)^2}, \text{ 則 } 2f'(1) = -2, \text{ 故選(A)}$$

Statement

將平面曲線 $y = f(x)$ 向右平移 1 單位，再以 y 軸為中心放大為兩倍，則所得曲線的方程式為何？

- (A) $y = f\left(\frac{x-1}{2}\right)$
 (B) $y = f\left(\frac{x}{2} - 1\right)$
 (C) $y = f(2x-1)$
 (D) $y = f\left(\frac{x+1}{2}\right)$
 (E) $y = f(2x+1)$

Solution

向右平移一單位，因此 x 改寫為 $(x-1)$

放大為兩倍，因此 $(x-1)$ 改寫為 $\frac{x}{2} - 1$

因此曲線方程式為 $f\left(\frac{x}{2} - 1\right)$ ，故選(B)

105年第1次北科入學數學會考

105-01-01

Statement

若 α, β 為方程式 $x^2 - 5x - 3 = 0$ 之兩根，則 $\alpha^3\beta + \alpha\beta^3 = ?$

(A) **-93**

(B) -57

(C) 53

(D) 93

(E) 105

Solution

$$\alpha^3\beta + \alpha\beta^3 = \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)$$

根據根與係數，可以知道 $\alpha\beta = \frac{-3}{1} = -3$ ，且 $\alpha + \beta = -\frac{-5}{1} = 5$

$$\text{已知}(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 25$$

$$\text{可知}\alpha^2 + \beta^2 = 31$$

$$\text{因此}\alpha^3\beta + \alpha\beta^3 = (-3)(31) = -93，\text{故選}(A)$$

105-01-02

Statement

已知 $(\log 7x)(\log ax) = 2$ 之兩根乘積為 $\frac{1}{72}$ ，則 $a = ?$

(A) $\frac{1}{72}$

(B) $\frac{7}{72}$

(C) 2

(D) **$\frac{72}{7}$**

(E) 72

Solution

$$(\log 7x)(\log ax) = 2$$

$$\Rightarrow (\log 7 + \log x)(\log a + \log x) = 2$$

$$\Rightarrow \log 7 \log a + \log(x)(\log 7 + \log a) + (\log x)^2 = 2$$

$$\Rightarrow (\log x)^2 + (\log x)(\log 7 + \log a) + \log 7 \log a = 2$$

利用偉達定理

$$\log \alpha + \log \beta = -(\log 7 + \log a)$$

$$\log \alpha \beta = -\log 7a$$

$$\log \alpha \log \beta = \log 7 \log a - 2$$

$$\text{因此 } \log \frac{1}{72} = -\log 7a, a = \frac{72}{7}$$

105-01-03

Statement

已知橢圓 E 通過點 $(2, 3)$ 且與橢圓 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 有相同焦點，則橢圓 E 的長軸長為何？

(A) $2\sqrt{5}$

(B) 6

(C) 8

(D) 10

(E) $8\sqrt{2}$

Solution

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \circ \text{可知原點為}(0, 0)$$

由焦點可知 $c = \sqrt{(\sqrt{9})^2 - (\sqrt{5})^2} = 2$ ，又這個橢圓長軸平行 x 軸，因此焦點為 $(-2, 0)$ 與 $(2, 0)$

考慮長軸 $2a = \overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ ，因此若焦點相同且確定過點 $P = (2, 3)$ ，

則我們可以知道新的橢圓的長軸為 $\sqrt{(2 - (-2))^2 + (0 - 3)^2} + \sqrt{(2 - (-2))^2 + (0 - 3)^2} = 8$

因此長軸為 8，故選 (C)

105-01-04

Statement

下列何者正確

(A) $\sin(-\theta) = \sin \theta$

(B) $\tan(-\theta) = \tan(\theta)$

(C) $2 \cos^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$

(D) $\tan^2 \theta - 1 = \sec^2 \theta$

(E) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

Solution

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ ，故選(E)

101-01-05

Statement

設 $\frac{x-8}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$ ，求 $3A + 2B + C = ?$

(A) -3

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 3

Solution

$$\frac{x-8}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow x-8 = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1)$$

代入 $x = 2$ ，則 $-6 = 3C$ ，因此 $C = -2$

代入 $x = -1$ ，則 $-9 = 9A$ ，因此 $A = -1$

代入 $x = 0$ ，則 $-8 = 4A - 2B + C$ ，因此 $B = 1$

因此 $3A + 2B + C = -3 + 2 - 2 = -3$ ，故選(A)

105-01-06

Statement

已知直線 L 與 $3x + 4y = 1$ 垂直與 x 軸、 y 軸在第四象限所圍的三角形面積為6，則 L 的方程式為何？

- (A) $3x - 4y = 6$
- (B) $3x - 4y = 12$
- (C) $4x + 3y = 6$
- (D) $4x - 3y = 6$
- (E) $4x - 3y = 12$

Solution

與 $3x + 4y = 1$ 垂直，可得到 $-4x + 3y = C$

已知 x 的截距長度為 $|\frac{C}{-4}| = \frac{C}{4}$ ，又 y 的截距長度為 $\frac{C}{3}$

因此 $\frac{1}{2} \cdot \frac{C}{4} \cdot \frac{C}{3} = 6$ ，可得 $C = \pm 12$

考慮 $C = 12$ ，可知 x 的截距為 $\frac{12}{-4} = -3$ ， y 的截距為 $\frac{12}{3} = 4$ ，三角形圍在第二象限，不合。

考慮 $C = -12$ ，可知 x 的截距為 $\frac{-12}{-4} = 3$ ， y 的截距為 $\frac{-12}{3} = -4$ ，三角形圍在第四象限

因此 $C = -12$ ，得到 $-4x + 3y = -12$ ，故選(E)

105-01-07

Statement

設 $3x^3 - 5x^2 + 7x + 1 = a(x - 2)^3 + b(x - 2)^2 + c(x - 2) + d$ ，則 $b + c = ?$

- (A) 16
- (B) 26
- (C) 36
- (D) 46
- (E) 56

Solution

利用綜合除法

$$\begin{array}{cccc|c}
 3 & -5 & 7 & 1 & \\
 & 6 & 2 & 18 & 2 \\
 \hline
 3 & 1 & 9 & & 19 \\
 & 6 & 14 & & \\
 \hline
 3 & 7 & & & 23 \\
 & 6 & & & \\
 \hline
 3 & 13 & & &
 \end{array}$$

可得到 $a = 3, b = 13, c = 23, d = 19$ ，因此 $b + c = 13 + 23 = 36$ ，故選(C)

105-01-08

Statement

已知拋物線的焦點為 $(1, 1)$ ，準線為 $x + y + 2 = 0$ ，則此拋物線的頂點坐標為何？

- (A) $(2, 2)$
- (B) $(2, -2)$
- (C) $(-1, 1)$
- (D) $(1, -1)$
- (E) $(0, 0)$

Solution

考慮做一條線 L 垂直準線與經過 $(1, 1)$

因此 $L: x - y = C$ ，代入 $(1, 1)$ 得到 $C = 0$ ，故 $L: x - y = 0$

找 L 與準線的交點 P ，解聯立方程組 $\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ ，可得 $y = -1$ 且 $x = -1$

因此頂點為 P 與焦點的中點，故 $(\frac{-1+1}{2}, \frac{-1+1}{2}) = (0, 0)$ ，故選(E)

105-01-09

Statement

若 $|\vec{a}| = 3$ 、 $|\vec{b}| = 4$ 且 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{37}$ ，則 $(2\vec{a} + 3\vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = ?$

- (A) -24
- (B) -12
- (C) 0
- (D) 12
- (E) 24

Solution

$$(2\vec{a} + 3\vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 3(\vec{a} \cdot \vec{b}) - 3|\vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b}) - 3|\vec{b}|^2$$

$$\text{又}(|\vec{a} + \vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 37$$

$$\text{故}2(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 12, \text{ 因此}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 6$$

$$\text{因此}(2\vec{a} + 3\vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 2 \times 3^2 + 6 - 3 \times 4^2 = -24, \text{ 故選}(A)$$

105-01-10

Statement

若 $S = 1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{99}$ ，則 S 為幾位數？($\log_2 0.3010$, $\log_3 = 0.4771$)

- (A) 45
- (B) 46
- (C) 47
- (D) 48
- (E) 49

Solution

$$S = \frac{1(1 - 3^{100})}{1 - 3} = \frac{3^{100} - 1}{2}$$

$$\text{因此} \log S = \log\left(\frac{3^{100} - 1}{2}\right) = \log(3^{100} - 1) - \log_2 \approx \log(3^{100}) - \log 2$$

$$\approx 100 \log(3) - \log 2 = 47.7 - 0.301 \approx 47.3$$

由於有小數點，無條件進位一位變成48，故選(D)

Statement

$\sqrt{x+3} > x-3$ 之所有解為何？

(A) $-3 \leq x < 3$

(B) $-3 \leq x < 6$

(C) $2 \leq x < 3$

(D) $-3 \leq x < 7$

(E) $x < 6$

Solution

$$\sqrt{x+3} > x-3$$

考慮定義域，可知 $x \geq -3$

令 $t = x - 3$ ，則 $\sqrt{t+6} > t$

考慮 t 的所有可能

若 $t \geq 0$ ，則 $x \geq 3$

因此 $t+6 > t^2$ ，得到 $t^2 - t - 6 < 0 \Rightarrow (t-3)(t+2) < 0$

因此 $-2 < t < 3$ ，還原成 x 得到 $1 < x < 6$

與 $x \geq 3$ 取交集，得到 $3 \leq x < 6$

若 $t < 0$ ，則 $x < 3$

但由於 $\sqrt{t+6}$ 在定義域內時恆大於等於0，所以 $\sqrt{t+6} > t$ ，因此 $t \in \mathbb{R}$ ，與 $x < 3$ 求交集得到 $x \in (-\infty, 3)$

因此，兩者種可能得到的結果取聯集得到 $x \in (-\infty, 6)$ ，與定義域取交集得到 $x \in [-3, 6)$ ，故選(B)

Statement

若方程式 $\frac{x^2}{t^2-4} + \frac{y^2}{t^2-9} = 1$ 的圖形為雙曲線，求實數 t 的範圍

(A) $t < -2$

(B) $t > 3$

(C) $-3 < t < 3$

(D) $-2 < t < 2$

(E) $-3 < t < -2$ 且 $2 < t < 3$

Solution 2

湊係數解 by Uriah

考慮能夠湊出 x^3 的方法： $(x^2 \times bx)$ 、 $(2x \times x^2)$

因此 $b + 2 = 2$ ，得到 $b = 0$

考慮能夠湊出 x^2 的方法： $(2x \times bx)$ 、 $(x^2 \times c)$ 、 $(-1) \times (x^2)$

因此 $m = 2b + c - 1 = c - 1$

考慮能夠湊出 x 的方法： $(-1 \times bx)$ 、 $(2x \times c)$

因此 $-b + 2c = n$

考慮能夠湊出常數的方法，也就是 $(-1 \times c) = -3$ ，因此 $c = 3$

由於 $c = 3$ ，故 $m = 2$ ， $n = 6$

因此 $m = 2, n = 6, b = 0, c = 3$

因此 $4m - n + 2b + c = 4 \cdot 2 - 6 + 2 \cdot 0 + 3 = 8 - 6 + 3 = 5$ ，故選(B)

105-01-14

Statement

xy 平面上，求曲線 $y = \sqrt{25 - x^2}$ 與 x 軸所圍的面積為何？

- (A) $\frac{5\pi}{4}$
- (B) 5π
- (C) $\frac{25\pi}{4}$
- (D) $\frac{25\pi}{2}$
- (E) 25π

Solution 1

Non-Calculus solution by Uriah

考慮曲線 $y = \sqrt{25 - x^2}$ 是一個半徑為5且圓心在原點的半圓，因此其面積為 $\frac{1}{2} \times 5 \times 5 \times \pi = \frac{25}{2}\pi$ ，故選(D)

Solution 2

Calculus solution by Uriah

考慮 $y = \sqrt{25 - x^2}$ ，令 $y = 0$ 得到 $x = \pm 5$ ，因此圖形交於 x 軸在 $x = -5$ 與 $x = 5$ 上。

因此我們考慮 $\int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx$

令 $x = 5 \sin t$ ，反推 $t = \arcsin\left(\frac{x}{5}\right)$ ，而 $dx = 5 \cos t dt$

$$\begin{aligned} \text{則 } \int_{-5}^5 \sqrt{25-x^2} dx &\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 5\sqrt{25-25\sin^2 t} \cos t dt = 25 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 25 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\ &= 25 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} = 25 \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{25\pi}{2}, \text{ 故選 } (D) \end{aligned}$$

105-01-15

Statement

多項式 $f(x)$ 以 $x^2 - 1$ 、 $x^2 - 5x + 6$ 除之的餘式分別為 $3x + 1$ 、 $2x - 1$ ，則以 $x^2 - 3x + 2$ 的餘式為何？

- (A) $-x + 5$
 (B) $x + 2$
 (C) $5x + 1$
 (D) $2x + 7$
 (E) $-2x + 3$

Solution

考慮 $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

考慮 $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$

考慮 $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ ，且設 $x^2 - 3x + 2$ 的餘式為 $ax + b$

若 $x = 2$ ，則結果等價於 $x^2 - 5x + 6$ 的餘式帶入 $x = 2$ 的結果，也就是 $4 - 1 = 3$

因此 $2a + b = 3$

若 $x = 1$ ，則結果等價於 $x^2 - 1$ 的餘式帶入 $x = 1$ 的結果，也就是 $3 + 1 = 4$

因此 $a + b = 4$

透過 $\begin{cases} 2a + b = 3 \\ a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (-1, 5)$ ，得到 $x^2 - 3x + 2$ 的餘式為 $-x + 5$ ，故選(A)

105-01-16

Statement

$\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 7 : 8 : 3$ ，則 $\cos A = ?$

- (A) $\frac{-1}{8}$
 (B) $\frac{-1}{7}$
 (C) $\frac{1}{8}$
 (D) $\frac{1}{7}$
 (E) $\frac{1}{3}$

Solution

利用餘弦定理， $\cos A = \frac{7^2 + 3^2 - 8^2}{2 \times 7 \times 3} = \frac{-6}{42} = -\frac{1}{7}$ ，故選(B)

105-01-17

Statement

設向量 $\vec{a} = \langle 1, 2 \rangle$ ， $\vec{b} = \langle \frac{1}{2} - 4^{x+1}, 7 \cdot 2^x \rangle$ ，若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，則 $x = ?$

(A) -3

(B) -2

(C) $\frac{1}{8}$

(D) 2

(E) 3

Solution

由於 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，所以 $(\frac{1}{2} - 4^{x+1}) \times 2 = 7 \cdot 2^x$

$$\Rightarrow 1 - 8 \cdot 4^x = 7 \cdot 2^x$$

$$\Rightarrow -8 \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 2^x + 1 = 0$$

令 $t = 2^x$ ，則 $-8t^2 - 7t + 1 = 0$ ，得到 $t = \frac{1}{8}$ 或 $t = -1$ (不合)

還原 t ，得到 $x = -3$ ，故選(A)

105-01-18

Statement

設 $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ，則 $\sqrt{1 + \sin 2\theta} - \sqrt{1 - \sin 2\theta} = ?$

(A) 0

(B) $\sin \theta$

(C) $2 \sin \theta$

(D) $\cos \theta$

(E) $2 \cos \theta$

Solution

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \sin 2\theta} - \sqrt{1 - \sin 2\theta} &= \sqrt{\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta} - \sqrt{\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{(\sin \theta + \cos \theta)^2} - \sqrt{(\sin \theta - \cos \theta)^2} = 2 \cos \theta, \text{ 故選}(E)\end{aligned}$$

105-01-19

Statement

設 x 為實數，求 $f(x) = 3(5^x + 5^{-x}) - 2(25^x + 25^{-x}) + 1$ 之最大值為何

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 5

(E) 25

Solution

令 $t = 5^x + 5^{-x}$ ，則 $t^2 = 25^x + 25^{-x} + 2$

因此可以把式子轉成 $f(t) = -2t^2 + 3t + 5$

利用配方法，可以知道 $f(t) = -2t^2 + 3t + 5 \Rightarrow f(t) = -2\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{49}{8}$

需要注意， t 不能帶 $\frac{3}{4}$ ，因為 $\frac{3}{4}$ 不在 t 的值域。

利用算幾不等式，得到 $\frac{5^x + 5^{-x}}{2} \geq \sqrt{1}$

因此 $5^x + 5^{-x} \geq 2$ ，得到 $t \geq 2$ ，因此 t 代2

因此 $f(2) = -2\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{49}{8} = 3$ ，故選(C)

105-01-20

Statement

設點 (a, b) 在直線 $x - 2y = 0$ 上且點 (c, d) 在直線 $2x - 4y = 1$ 上，則 $(a - c)^2 + (b - d)^2$ 之最小值為何？

(A) $\frac{1}{20}$

(B) $\frac{1}{10}$

(C) $\frac{1}{5}$

(D) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

(E) $\frac{1}{\sqrt{20}}$

Solution

兩條線為平行線，因此我們考慮兩條直線的距離

利用兩直線距離公式，得到 $\frac{|0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{20}}$

因此 $(a - c)^2 + (b - d)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{20}}\right)^2 = \frac{1}{20}$ ，故選(A)

105年第2次北科入學數學會考

105-02-01

Statement

若 $\frac{1}{\alpha}$ 和 $\frac{1}{\beta}$ 為方程式 $x + \frac{3}{x} = 1$ 的兩根，則 $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = ?$

(A) $\frac{1}{9}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) 1

(D) 2

(E) 3

Solution

$$x + \frac{3}{x} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 + 3 = x$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 3 = 0$$

利用偉達定理

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -\left(\frac{-1}{1}\right) = 1 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$$

$$\frac{1}{\alpha\beta} = 3 \Rightarrow \alpha\beta = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \alpha\beta = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{1}{3}$$

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}, \text{ 故選(A)}$$

105-02-02

Statement

下列何者為方程式 $4(4^x + 4^{-x}) - (2^x + 2^{-x}) - 60 = 0$ 的解？

(A) -4

(B) -2

(C) 0

(D) 1

(E) 3

Solution

$$4(4^x + 4^{-x}) - (2^x + 2^{-x}) - 60 = 0$$

$$\Rightarrow 4(2^{2x} + 2^{-2x}) - (2^x + 2^{-x}) - 60 = 0$$

$$\text{令 } t = (2^x + 2^{-x}), \text{ 則 } t^2 = 2^{2x} + 2^{-2x} + 2$$

$$\text{將式子轉成 } 4t^2 - t - 68 = 0$$

$$\text{得到 } t = -4(\text{不合}) \text{ 與 } t = \frac{17}{4}$$

還原 t ，得到 $x = \pm 2$ ，故選 (B)

105-02-03

Statment

若 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ，則滿足方程式 $\frac{\cos \theta(1 + 2 \sin \theta)}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \sin \theta} = 0$ 之 θ 的個數為何？

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(E) 4

Solution

$$\cos \theta(1 + 2 \sin \theta) = 0$$

$$\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ, 270^\circ$$

$$(1 + 2 \sin \theta) = 0 \Rightarrow \sin \theta = \frac{-1}{2} \Rightarrow \theta = 240^\circ, \theta = 300^\circ$$

考慮 $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \sin \theta$ 的定義域，要求 $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \sin \theta \neq 0$

$$\text{因此 } -2 \sin^2 \theta - \sin \theta + 1 \neq 0$$

$$\text{得到 } \sin \theta \neq -1, \frac{1}{2}$$

$$\text{因此 } \sin \theta \neq 270^\circ, 60^\circ, 120^\circ$$

故答案有 3 個，故選 (D)

105-02-04

Statement

已知 $f(x)$ 為二次多項式。若 $f(x) < 0$ 之解為 $-3 < x < 2$ 且 $f(1) = -4$ ，則 $f(x) = ?$

(A) $x^2 - 3x + 2$

(B) $x^2 - 2x - 3$

(C) $x^2 + x - 6$

(D) $x^2 + 2x - 7$

(E) $x^2 + 3x - 8$

Solution

因為 $f(x) < 0$ 之解為 $-3 < x < 2$ ，因此 $f(x)$ 可以列式成 $f(x) = a(x + 3)(x - 2)$

又 $f(1) = -4$ ，因此 $a \times 4 \times -1 = -4$ ，得到 $a = 1$

因此 $f(x) = (x + 3)(x - 2) = x^2 + x - 6$ ，故選(C)

105-02-05

Statement

已知一正方體所有邊長和為 x 。若將此正方體的表面積和體積之值加總表示成一多項式，則此多項式包含哪一種因式？

(A) $x + 6$

(B) $x + 12$

(C) $x + 18$

(D) $x + 36$

(E) $x + 72$

Solution

所有邊長和為 x ，因此一邊長為 $\frac{x}{12}$

可知體積為 $\frac{x^3}{12^3}$ 且表面積為 $\frac{x^2}{24}$

因此兩個加總得到 $\frac{x^3}{1728} + \frac{x^2}{24} = \frac{x^3 + 72x^2}{1728} = \frac{x^2(x + 72)}{1728}$ ，故有因式 $x + 72$

105-02-06

Statement

已知向量 $\vec{a} = \langle 5, -12 \rangle$ ，向量 \vec{b} 與向量 \vec{a} 同向且 $|\vec{b}| = 39$ ，若 \vec{b} 之起點為 $(-1, 3)$ ，則 \vec{b} 之終點為何？

- (A) $(14, -33)$
- (B) $(-14, 33)$
- (C) $(-18, 45)$
- (D) $(18, -45)$
- (E) $(4, -9)$

Solution

向量 \vec{b} 與向量 \vec{a} 同向，因此 $\vec{b} = \langle 5a, -12a \rangle, a \in \mathbb{R}$

又 $|\vec{b}| = 39$ ，因此 $\sqrt{(5a)^2 + (-12a)^2} = 39$ ，得到 $a = 3$

因此 $\vec{b} = \langle 15, -36 \rangle$ ，又 \vec{b} 之起點為 $(-1, 3)$

因此 \vec{b} 之終點為 $(-1 + 15, 3 - 36) = (14, -33)$ ，故選 (A)

105-02-07

Statement

方程式 $\log x + \log(x + 2) = \log(x + 1) + 1$ 的解為何？

- (A) $4 - \sqrt{26}$
- (B) $4 - 2\sqrt{3}$
- (C) $4 - \sqrt{2}$
- (D) $4 + 2\sqrt{3}$
- (E) $4 + \sqrt{26}$

Solution

$$\log x + \log(x + 2) = \log(x + 1) + 1$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{x^2 + 2x}{10x + 10}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 2x}{10x + 10} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 1 \times -10}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{26}}{2} = 4 \pm \sqrt{26}$$

由於 $4 < \sqrt{26}$ ，因此 $4 - \sqrt{26} < 0$ ，不在 $\log x$ 的值域內，因此不合

故 $x = 4 + \sqrt{26}$ ，故選(E)

105-02-08

Statement

設 $\sin 2\theta = \frac{4}{5}$ ，則 $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = ?$

(A) $\frac{17}{25}$

(B) $\frac{18}{25}$

(C) $\frac{19}{25}$

(D) $\frac{4}{5}$

(E) $\frac{21}{25}$

Solution

$$(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 = \sin^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta$$

$$= \sin^4 \theta + 2(\sin \theta \cos \theta)^2 + \cos^4 \theta$$

$$= \sin^4 \theta + \frac{1}{2}(\sin^2 2\theta) + \cos^4 \theta = 1$$

因此 $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{17}{25}$ ，故選(A)

105-02-09

Statement

已知 θ 為平面上兩向量 \vec{a} 與 \vec{b} 之夾角，若 $|\vec{a}| = 3$ 、 $|\vec{b}| = 5$ 且 $|2\vec{a} + \vec{b}| = 7$ ，則 $\cos \theta = ?$

(A) $-\frac{1}{5}$

(B) $-\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{5}$

(D) $\frac{1}{3}$

(E) $\frac{4}{5}$

Solution

$$|2\vec{a} + \vec{b}| = 7$$

$$\Rightarrow 4|\vec{a}|^2 + 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 49$$

$$\Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b}) = -3$$

$$\text{又 } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = -3$$

$$\text{因此 } \cos \theta = \frac{-3}{15} = \frac{-1}{5}, \text{ 故選(A)}$$

105-02-10

Statement

若 $\frac{x^3 - 5}{x^2 - 1} = f(x) + \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1}$ ，其中 $f(x)$ 為一次式且 a, b 為常數，求 $a + b = ?$

(A) -1

(B) 0

(C) 1

(D) 2

(E) 3

Solution

假設 $f(x) = cx + d$

$$x^3 - 5 = (cx + d)(x^2 - 1) + a(x + 1) + b(x - 1)$$

$$= cx^3 - cx + dx^2 + ax + a + bx - b$$

$$= cx^3 + dx^2 + (a - c + b)x + (a - b) = x^3 - 5$$

因此 $c = 1, d = 0$

$$\begin{cases} a + b - 1 = 0 \\ a - b = -5 \end{cases}, \text{ 解聯立得 } a = -2 \text{ 且 } b = 3$$

因此 $a + b = 1$ ，故選(C)

105-02-11

Statement

若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{a+x} - \frac{1}{b}}{x-1} = \frac{1}{4}$ ，則 $a + b = ?$

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(E) 4

Solution

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{a+x} - \frac{1}{b}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x + (b-a)}{(ab+bx)(x-1)} = \frac{1}{4}$$

若極限值存在，則 $b-a=1$ ，且 $ab+b=4$

因此， $\begin{cases} b-a=1 \\ ab+b=4 \end{cases}$ ，故得到 $(a,b)=(-3,-2)$ 或 $(a,b)=(1,2)$

$a+b=-5$ 或 3 ，故選(D)

105-02-12

Statement

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+3h)^2 - 4^2}{\sqrt{4+3h} - 2} = ?$$

(A) 0

(B) 16

(C) 32

(D) 64

(E) 不存在

Solution

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+3h)^2 - 4^2}{\sqrt{4+3h} - 2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+3h-4)(4+3h+4)}{\sqrt{4+3h} - 2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+3h-4)(4+3h+4)(\sqrt{4+3h}+2)}{4+3h-4}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (3h+8)(\sqrt{4+3h}+2) = 8 \times 4 = 32, \text{ 故選(C)}$$

105-02-13

Statement

若拋物線 $y = x^2 - ax + 3$ 與直線 $3x + y + 1 = 0$ 不相交且 a 為整數，則 a 有幾種可能？

(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 6

(E) 7

Solution

已知拋物線的動點為 $(x, x^2 - ax + 3)$

因此考慮代入 $3x + y + 1$ 時會大於0

得到 $3x + x^2 - ax + 4 > 0 \Rightarrow x^2 + (3 - a)x + 4 > 0$

利用判別式： $(3 - a)^2 - 16 > 0$ 確認解與 x 無交集

得到 $-1 < a < 7$ ，因此 a 有7種可能，故選(E)

105-02-14

Statement

直線 $ax - y = b$ 與 $x + 2y = 3$ 垂直且過點 $(2, 3)$ ，則 $ab = ?$

(A) -4

(B) -2

(C) 0

(D) 2

(E) 4

Solution

由於兩條直線垂直，因此可知 $a = 2$

又 $2x - y = b$ 過點 $(2, 3)$ ，代入後可知 $b = 1$ ，因此 $ab = 2$ ，故選(D)

105-02-15

Statement

設 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ ， $g(x) = 2 + x - x^2$ ，則合成函數 $f \circ g$ 的定義域為何？

(A) \emptyset (空集合)

(B) $0 < x < 1$

(C) $0 \leq x \leq 1$

(D) $x < 0$ 或 $x > 1$

(E) $x \leq 0$ 或 $x \geq 1$

Solution

$$f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2-2}} = \frac{1}{\sqrt{-x^2+x}}$$

考慮 $\sqrt{-x^2+x} \neq 0$ ，因此 $-x^2+x > 0$ ，因此 $0 < x < 1$ ，故選(B)

105-02-16

Statement

若直線 L 的斜率為 $\frac{2}{3}$ 且與 x 軸所夾之銳角為 θ ，則 $\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) = ?$

(A) $\frac{-3}{\sqrt{13}}$

(B) $\frac{-2}{\sqrt{13}}$

(C) $\frac{-1}{\sqrt{13}}$

(D) $\frac{2}{\sqrt{13}}$

(E) $\frac{3}{\sqrt{13}}$

Solution

直線 L 的斜率為 $\frac{2}{3}$ ，因此可知 $m = \frac{2}{3}$ ，也就是 $\tan \theta = \frac{2}{3}$

透過 $\tan \theta = \frac{2}{3}$ ，可知 $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$ 且 $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$

因此 $\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\sin \theta = \frac{-2}{\sqrt{13}}$ ，故選(B)

105-02-17

Statement

已知 $A(3, 5), B(-1, 2), C(4, 7)$ 為坐標平面上三點，則 $\vec{AB} + 3\vec{BC} + 3\vec{CA} = ?$

(A) $(-4, -3)$

(B) $(-8, -6)$

(C) $(4, 3)$

(D) $(8, 6)$

(E) $(12, 9)$

Solution

$$\vec{AB} + 3\vec{BC} + 3\vec{CA} = \vec{AB} + \vec{BA} + 2(\vec{BA}) = 2\vec{BA}$$

又 $\vec{BA} = \langle 4, 3 \rangle$ ，因此 $2\vec{BA} = \langle 8, 6 \rangle$ ，故選(D)

105-02-18

Statement

若一拋物線通過 $(-2, 19)$, $(6, 16)$, $(1, 4)$ 三點，則此拋物線的頂點坐標為何？

(A) $(2, 1)$

(B) $(2, 3)$

(C) $(2, 5)$

(D) $(2, 6)$

(E) $(2, 7)$

Solution

由 $(-2, 19)$ 與 $(6, 19)$ 兩點可知，頂點必為 $(2, y)$

$$\text{因此 } y = a(x - 2)^2 + b$$

$$\text{代入 } (1, 4) \text{ 後得到 } 4 = a + b$$

$$\text{代入 } (-2, 19) \text{ 後得到 } 19 = 16a + b$$

因此 $a = 1, b = 3$ ，故頂點為 $(2, 3)$ ，故選(B)

105-02-19

Statement

若 $f(x) = \log_{\sqrt{5}}(2x^3 - 5x^2 - 10x + 8)$ ，則 $f(2 - \sqrt{3}) = ?$

(A) -4

(B) -2

(C) 1

(D) 2

(E) 4

Solution

利用綜合除法，將 $2x^3 - 5x^2 - 10x + 8$ 轉換成以 $(x - 2)$ 的形式

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -5 & -10 & 8 \\ & & 4 & -2 & -24 \\ \hline & 2 & -1 & -12 & -16 \\ & & 4 & 6 & \\ \hline & 2 & 3 & -6 & \\ & & 4 & & \\ \hline & 2 & 7 & & \end{array}$$

得到 $f(x) = \log_{\sqrt{5}}(2(x - 2)^3 + 7(x - 2)^2 - 6(x - 2) - 16)$

$f(2 - \sqrt{3}) = \log_{\sqrt{5}}(6\sqrt{3} + 21 - 6\sqrt{3} - 16) - \log_{\sqrt{5}}(5) = 2$ ，故選(D)

105-02-20

Statement

若一橢圓之焦點為 $(1 - \sqrt{3}, -1)$ 與 $(1 + \sqrt{3}, -1)$ 且過 $(3, -2)$ ，則此橢圓長軸之長為何？

- (A) $2\sqrt{3}$
- (B) 4
- (C) $2\sqrt{5}$
- (D) $2\sqrt{6}$
- (E) $2\sqrt{7}$

Solution

原點 $O = \left(\frac{(1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})}{2}, \frac{-1 - 1}{2} \right) = (1, -1)$

$$a^2 = 3 + b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - 3$$

因此可以列式 $\frac{(x - 1)^2}{a^2} + \frac{(y + 1)^2}{a^2 - 3} = 1$

得 $\frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2 - 3} = 1$ ，解方程式得到 $a = \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{6}$

因為 $a^2 - 3$ 代入 $\sqrt{2}$ 後會小於0，所以橢圓不成立變成雙曲線，因此 $\pm\sqrt{2}$ 不合。

因此長軸為 $2a = 2\sqrt{6}$ ，故選(D)

106年第1次北科入學數學會考

106-01-01

Statement

已知點 A 在圓 $x^2 + 12x + y^2 + 32 = 0$ 上，且點 B 在圓 $x^2 + y^2 + 16y + 55 = 0$ ，則 \overline{AB} 之長度最小值為何？

- (A) 5
- (B) 6
- (C) 7
- (D) 8
- (E) 9

Solution

用配方法改寫式子

$$x^2 + 12x + y^2 + 32 = 0 \Rightarrow (x + 6)^2 + y^2 = 4, \text{ 圓心為 } (-6, 0) \text{ 且半徑為 } 2$$

$$x^2 + y^2 + 16y + 55 = 0 \Rightarrow x^2 + (y + 8)^2 = 9, \text{ 圓心為 } (0, -8) \text{ 且半徑為 } 3$$

兩圓心距離為 $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ ，大於兩半徑和，因此 $\overline{AB} > 0$

故 $\overline{AB} = 10 - 2 - 3 = 5$ ，故選(A)

106-01-02

Statement

若橢圓方程式 $\sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2} = 10$ ，則橢圓短軸長為何？

- (A) 2
- (B) 3
- (C) 4
- (D) 5
- (E) 6

Solution

由方程式可以知道

焦點為 $(1, 5)$ 與 $(1, -3)$ ，因此 $2c = 5 - (-3) = 8$ ， $c = 4$

長軸長 $2a = 10$ ，因此 $a = 5$

$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{9} = 3$ ，因此橢圓短軸長為 $2b = 6$ ，故選(E)

106-01-03

Statement

若直線 L 與直線 $5x + 7y = 1$ 垂直，且 L 通過兩直線 $2x - 3y + 1 = 0$ 與 $4x + 5y - 9 = 0$ 的交點，則 L 的方程式為何？

(A) $5x - 7y = -2$

(B) $5x + 7y = 12$

(C) $7x - 5y = 2$

(D) $7x + 5y = 12$

(E) $7x + 5y = 20$

Solution

直線 L 與直線 $5x + 7y = 1$ 垂直，設 $L: 7x - 5y = d$

且 L 通過兩直線 $2x - 3y + 1 = 0$ 與 $4x + 5y - 9 = 0$ 的交點

因此解聯立方程組 $\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ 4x + 5y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (1, 1)$

帶入直線 L ，得到 $d = 2$ ，因此 $L: 7x - 5y = 2$ ，故選(D)

106-01-04

Statement

$\log_2 216 - \log_4 9 - \log_2 9 = ?$

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6

Solution

$\log_2 216 - \log_4 9 - \log_2 9$

$= \log_2 216 - \log_2 3 - \log_2 9 = \log_2 8 = 3$ ，故選(B)

Statement

設 α, β 為方程式 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的兩根，則 $\frac{\alpha^2\beta + \alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = ?$

(A) -4

(B) $-\frac{1}{2}$

(C) $-\frac{1}{3}$

(D) $\frac{1}{6}$

(E) $\frac{1}{2}$

Solution

利用根與係數

$$\alpha + \beta = -\frac{-2}{1} = 2$$

$$\alpha\beta = \frac{-1}{1} = -1$$

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 4 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 6$$

$$\frac{\alpha^2\beta + \alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\alpha\beta(\alpha + \beta)}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{(-1)(2)}{6} = -\frac{1}{3}, \text{ 故選(C)}$$

Statement

設 $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ 且 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ，則 $\sqrt{2 + 2 \cos 2\theta} = ?$

(A) 0

(B) $\frac{4}{5}$

(C) 1

(D) $\frac{6}{5}$

(E) $\frac{8}{5}$

Solution

$$\sin \theta = \frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \Rightarrow \cos \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

因此 $\sqrt{2 + 2 \cos 2\theta} = \sqrt{2 + \frac{14}{25}} = \sqrt{\frac{64}{25}} = \frac{8}{5}$ ，故選(E)

106-01-07

Statement

已知 $f(x)$ 為二次函數且 $f(x) > 0$ 的解為 $-1 < x < \frac{1}{2}$ ，則 $f(2x) < 0$ 的解為何？

(A) $x < -1$ 或 $x > \frac{1}{2}$

(B) $x < -2$ 或 $x > 1$

(C) $-2 < x < 1$

(D) $x < -\frac{1}{2}$ 或 $x > \frac{1}{4}$

(E) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{4}$

Solution

$\because f(x) > 0$ 的解為 $-1 < x < \frac{1}{2}$

$\therefore f(x) < 0$ 的解為 $x < -1 \cup x > \frac{1}{2}$

$\therefore f(2x) < 0$ 的解為 $x < \frac{-1}{2} \cup x > \frac{1}{4}$ ，故選(D)

106-01-08

Statement

設 α, β 為方程式 $\log_3 x = 5 - \frac{4}{\log_3 x}$ 之兩根，則 $\alpha + \beta = ?$

(A) 84

(B) 85

(C) 86

(D) 87

(E) 88

Solution

$$\log_3 x = 5 - \frac{4}{\log_3 x}$$

$$\Rightarrow (\log_3 x)^2 = 5 \log_3 x - 4$$

$$\Rightarrow (\log_3 x)^2 - 5 \log_3 x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (\log_3 x - 4)(\log_3 x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \log_3 x = 4, \log_3 x = 1$$

$$\Rightarrow x = 81, x = 3$$

因此 $81 + 3 = 84$ ，故選(A)

106-01-09

Statement

求 $2 \cdot 9^x - 39 \cdot 3^{x-1} - 45 = 0$ ，則 $x = ?$

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

Solution

$$2 \cdot 9^x - 39 \cdot 3^{x-1} - 45 = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 3^x - 45 = 0$$

$$\text{令 } t = 3^x, \text{ 解 } 2t^2 - 13t - 45 = (t + \frac{5}{2})(t - 9) = 0, t = -\frac{5}{2} \text{ (不合)}, t = 9$$

從 $t = 9$ 還原後，得到 $x = 2$ ，故選(B)

106-01-10

Statement

下列何者正確？

(A) $\sin \frac{3\pi}{4} < \cos \frac{3\pi}{4}$

(B) $\cos(-\theta) = -\cos \theta$

(C) $1 + \sec^2 \theta = \tan^2 \theta$

(D) $\sec(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\csc \theta$

(E) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta$

Solution

$$\sec(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\csc \theta$$

106-01-11

Statement

若 $13^5 - 11 \cdot 13^4 - 25 \cdot 13^3 - 12 \cdot 13^2 + a \cdot 13 - 13 = 0$ ，求 $a = ?$

- (A) -12
- (B) -11
- (C) 1
- (D) 7
- (E) 17

Solution

$$13^5 - 11 \cdot 13^4 - 25 \cdot 13^3 - 12 \cdot 13^2 + a \cdot 13 - 13 = 0$$

等價於 $f(x) = x^5 - 11x^4 - 25x^3 - 12x^2 + ax - 13$ 能被 $x - 13$ 整除

利用綜合除法來找出 a

1	-11	-25	-12	a	-13	
	13	26	13	13	13a+169	13
1	2	1	1	(a+13)	13a+156	

考慮 $13a + 156 = 0$ ，得到 $a = -12$

106-01-12

Statement

設拋物線方程式為 $x = ay^2 + b$ ，其中 $a > 0$ 。若此拋物線過 $(0, \sqrt{2})$ 且焦點坐標為 $(-\frac{1}{2}, 0)$ ，則 $a - b = ?$

- (A) $\frac{1}{2}$
- (B) $\frac{3}{2}$
- (C) $\frac{7}{4}$
- (D) 2
- (E) $\frac{7}{2}$

Solution

$$x = ay^2 + b \Rightarrow \frac{1}{a}(x - b) = y^2$$

因此頂點為 $(b, 0)$ ，且焦距為 $\frac{1}{4a}$ ，雙曲線為左右向

拋物線過 $(0, \sqrt{2})$ ，帶入後 $\frac{-b}{a} = 2 \Rightarrow 2a + b = 0$

焦點坐標為 $(-\frac{1}{2}, 0)$ ，因此 $b + \frac{1}{4a} = \frac{-1}{2} \Rightarrow 4ab + 2a + 1 = 0$

兩式 $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 4ab + 2a + 1 = 0 \end{cases}$ 解聯立，得到 $(a, b) = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ (不合)或 $(a, b) = (\frac{1}{2}, -1)$

因此 $a - b = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2}$ ，故選(B)

106-01-13

Statement

若 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + k$ 且 $f(1 + \sqrt{3}) = 2$ ，求 $k = ?$

(A) -3

(B) -2

(C) 2

(D) 3

(E) 6

Solution 1

綜合除法解 by Trava

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + k = (x - 1)^3 - (x - 1)^2 - 3(x - 1) + k - 1$$

$$\text{則 } f(1 + \sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 - (\sqrt{3})^2 - 3\sqrt{3} + k - 1 = 2$$

得到 $k = 6$ ，故選(E)

Solution 2

暴力解 by Uriah

$$f(1 + \sqrt{3}) = (1 + \sqrt{3})^3 - 4(1 + \sqrt{3})^2 + 2(1 + \sqrt{3}) + k = 2$$

$$= 10 + 6\sqrt{3} - 4(4 + 2\sqrt{3}) + 2(1 + \sqrt{3}) + k = 2$$

$$= 10 - 16 + 2 + k = 2, \text{ 得到 } k = 6, \text{ 故選(E)}$$

106-01-14

Statement

已知向量 \vec{a} 、 \vec{b} 之夾角為 θ ，若 $|\vec{a}| = 2$ 、 $|\vec{b}| = 4$ 且 $(3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = -4$ ，則 $\theta = ?$

(A) 0

(B) $\frac{\pi}{6}$

(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{3}$

(E) $\frac{\pi}{2}$

Solution

$$(3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 6|\vec{a}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b}) - 2|\vec{b}|^2 = -4$$

得到 $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 4$

$$\text{又 } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = 8 \cos \theta = 4$$

因此 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ， $\theta = \frac{\pi}{3}$ ，故選(D)

106-01-15

Statement

若雙曲線方程式 $x^2 - 2x - 4y^2 - 3 = 0$ 之兩頂點坐標為 (a, b) 與 (c, d) ，則 $a + b + c + d = ?$

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(E) 4

Solution

$$x^2 - 2x - 4y^2 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 - 4y^2 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{(x - 1)^2}{4} - y^2 = 1$$

得到中心為 $(x, y) = (1, 0)$ ，因此頂點過 $y = 0$

帶入 $y = 0$ 後得到 $x = -1$ 或 $x = 3$

因此頂點為 $(-1, 0)$ 與 $(3, 0)$

$$a + b + c + d = (-1) + 0 + 3 + 0 = 2, \text{ 故選}(C)$$

106-01-16

Statement

設 (a, b) 滿足 $3x + 4y = 12$ ，則 $(a - 4)^2 + (b - 5)^2$ 最小值為何？

(A) 4

(B) 8

(C) 12

(D) 16

(E) 20

Solution 1

柯西不等式解 by Trava

$$\text{已知 } 3a + 4b = 12$$

$$\text{則 } ((a - 4)^2 + (b - 5)^2)(3^2 + 4^2) \geq (3a + 4b - 12 - 20)^2$$

$$\Rightarrow ((a - 4)^2 + (b - 5)^2)(25) \geq (-20)^2$$

$$\Rightarrow ((a - 4)^2 + (b - 5)^2) \geq 16, \text{ 故選}(D)$$

Solution 2

點到直線距離解 by Trava

$$d^2 = \left(\frac{|12 + 20 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right)^2 = 16$$

Solution 3

配方法解 by Uriah

$$\text{動點 } P = \left(\frac{12 - 4b}{3}, b \right) \text{ 在 } 3x + 4y = 12 \text{ 上}$$

$$\text{帶入 } P \text{ 至 } (a - 4)^2 + (b - 5)^2 \text{ 內，得到 } \left(\frac{-4b}{3} \right)^2 + (b - 5)^2$$

$$\text{配方法後得到 } \frac{25}{9} \left(b + \frac{9}{5} \right)^2 + 16$$

$$\text{因此在 } b = -\frac{9}{5} \text{ 時有最小值 } 16, \text{ 故選}(D)$$

106-01-17

Statement

已知 $x^2 - 3x + 2$ 除 $f(x)$ 的餘式為 $2x + 5$ 且 $x^2 + 2x - 3$ 除 $g(x)$ 的餘式為 $3x - 1$ ，則 $x - 1$ 除 $[f(x) + g(x)]$ 的餘式為何？

- (A) -2
- (B) 4
- (C) 5
- (D) 7
- (E) 9

Solution

設 $h(x), v(x)$ 分別為 $f(x)$ 除 $x^2 - 3x + 2$ 與 $g(x)$ 除 $x^2 + 2x - 3$ 的餘式

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)h(x) + 2x + 5 = (x - 2)(x - 1)h(x) + 2x + 5$$

$$g(x) = (x^2 + 2x - 3)v(x) + 3x - 1 = (x + 3)(x - 1)v(x) + 3x - 1$$

因此 $x - 1$ 除 $[f(x) + g(x)]$ 的餘式為 $2 \cdot 1 + 5 + 3 \cdot 1 - 1 = 9$ ，故選(E)

106-01-18

Statement

設 $\pi < \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ 且 $18 \sin^2 \theta + 9 \cos \theta - 13 = 0$ ，則 $\tan \theta = ?$

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (C) $\sqrt{2}$
- (D) $2\sqrt{2}$
- (E) $3\sqrt{2}$

Solution

$$18 \sin^2 \theta + 9 \cos \theta - 13 = 0$$

$$\Rightarrow -18 \cos^2 \theta + 9 \cos \theta + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{3} \text{ 或 } \cos \theta = \frac{5}{6} \text{ (不合)}$$

因此 $\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ， $\tan \theta = 2\sqrt{2}$ ，故選(D)

106-01-19

Statement

令向量 $\vec{a} = \langle 1, 1 \rangle$ 、 $\vec{b} = \langle 2 - x, y - 1 \rangle$ 。若 $y > 0$ 、 $2|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，則 $(x, y) = ?$

(A) $(-1, -2)$

(B) $(3, 2)$

(C) $(4, 3)$

(D) $(5, 4)$

(E) $(6, 5)$

Solution

$\because \vec{a} \perp \vec{b}$

$$\therefore (2 - x) + (y - 1) = 0 \Rightarrow -x + y + 1 = 0$$

$$\text{又 } \sqrt{(2 - x)^2 + (y - 1)^2} = 2\sqrt{1^2 + 1^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{得到 } x^2 + y^2 - 2y - 4x + 5 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 8$$

將 $x = y + 1$ 代入，得到 $2(y - 1)^2 = 8$ ，因此 $y = -1$ (不合) 或 $y = 3$

將 $y = 3$ 代入 $-x + y + 1 = 0$ ，得到 $x = 4$

因此 $(x, y) = (4, 3)$ ，故選 (C)

106-01-20

Statement

$$\frac{-7x + 22}{(x + 4)(x - 1)^2} = \frac{A}{x + 4} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2}, \text{ 求 } A + B + C = ?$$

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6

Solution

$$-7x + 22 = A(x - 1)^2 + B(x + 4)(x - 1) + C(x + 4)$$

將 $x = 1$ 代入，得到 $15 = 5C$ ，因此 $C = 3$

將 $x = -4$ 代入，得到 $25A = 50$ ，因此 $A = 2$

將 $x = 0$ 代入，得到 $22 = 2 - 4B + 12$ ，因此 $B = -2$

因此 $A + B + C = 3$ ，故選(B)

106年第2次北科入學數學會考

106-02-01

Statement

方程式 $2 \sin x = x$ 有幾個解？

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6

Solution 1

不用微積分的解 by Trava

因為 $y = x$ 與 $y = 2 \sin x$ 均通過原點，所有在原點時會有交點

考慮到 $y = 2 \sin x$ 與 $y = x$ 為奇函數，所以只要判斷 $x > 0$ 的範圍就可以推得所有交點

由於 $2 \sin x$ 的最大值為2，所以只要 $x > 2$ ， $y = x$ 與 $y = 2 \sin x$ 就不可能有交點

令 $f(x) = 2 \sin x - x$

$f(\frac{\pi}{2}) > 0$ ，所以可以知道 $2 \sin x$ 的遞增速度比 x 快

在 $[\frac{\pi}{2}, 2]$ 的區間內 $2 \sin x$ 為遞減，因為 x 為嚴格遞增

所以在 $[\frac{\pi}{2}, 2]$ 會有一個交點，然後在 $[-\frac{\pi}{2}, -2]$ 也會有一個

所以總共有3個交點，故選(B)

Solution 2

微積分解 by Uriah

$f(x) = 2 \sin x - x$ ，考慮 $-\pi < x < \pi$

$\Rightarrow f'(x) = 2 \cos x - 1 = 0$ ，則 $\cos x = \frac{1}{2}$ ，極值發生在 $\frac{\pi}{3}$ 與 $-\frac{\pi}{3}$

考慮 $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ ，以 $x = 0$ 考慮，則 $f'(0) = 1$ ，遞增

考慮 $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ ，以 $x = \frac{\pi}{2}$ 考慮，則 $f'(\frac{\pi}{2}) = -1$ ，遞減

考慮 $-\pi < x < -\frac{\pi}{3}$ ，以 $x = -\frac{\pi}{2}$ 考慮，則 $f'(-\frac{\pi}{2}) = -1$ ，遞減

考慮 $f(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} > 0$ ， $f(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3} + \frac{\pi}{3} < 0$

根據中間值定理，可知 $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ 之曲線經過 x 軸，故存在一個解。

由於極值發生在兩個頂點上，因此 $x = \frac{\pi}{3}$ 右邊將會遞減到負無限大，且 $x = -\frac{\pi}{3}$ 左邊將會遞增到無限大

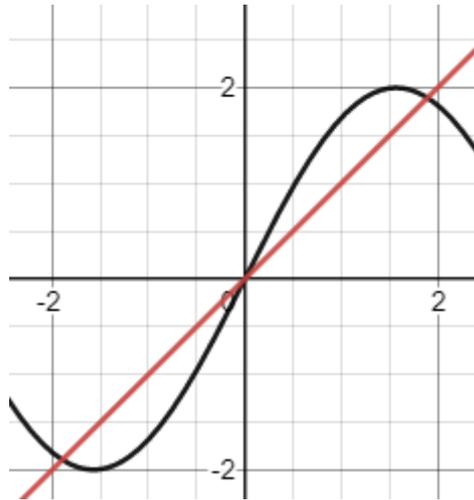
根據中間值定理，都會經過 $y = 0$ ，故存在兩個解。

總共有3個解，故選(B)

Solution 3

畫圖解By Uriah

畫出圖



故選(B)

106-02-02

Statement

設 x 為實數，求滿足兩不等式 $x^3 > 12 + 8x - x^2$ ， $x^2 < 4 + 3x$ 的解為何？

(A) $x < 2$ 或 $x > 3$

(B) $x > 3$

(C) $3 < x < 4$

(D) $-2 < x < 4$

(E) $x > 4$

Solution

考慮 $x^3 > 12 + 8x - x^2$

整理式子， $x^3 + x^2 - 8x - 12 > 0 \Rightarrow (x + 2)^2(x - 3) > 0$

考慮式子兩種可能的情況

$$\begin{cases} (x + 2)^2 < 0 \\ (x - 3) < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\begin{cases} (x + 2)^2 > 0 \\ (x - 3) > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 3$$

兩式取聯集，得到 $x > 3$

考慮 $x^2 < 4 + 3x$

整理式子， $x^2 - 3x - 4 > 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 1) > 0 \Rightarrow -1 < x < 4$

因此 $(x > 3) \cup -1 < x < 4 \Rightarrow 3 < x < 4$ ，故選(C)

106-02-03

Statement

$\cos 127^\circ \cos 23^\circ + \cos 217^\circ \cos 67^\circ = ?$

(A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(C) $-\frac{1}{2}$

(D) $\frac{1}{2}$

(E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution

$\cos 127^\circ \cos 23^\circ + \cos 217^\circ \cos 67^\circ$

$= -\cos 53^\circ \cos 23^\circ - \cos 37^\circ \cos 67^\circ$

$= -\sin 37^\circ \sin 67^\circ - \cos 37^\circ \cos 67^\circ$

$= -(\sin 37^\circ \sin 67^\circ + \cos 37^\circ \cos 67^\circ)$

$= -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，故選(A)

106-02-04

Statement

不等式 $\log_2(x - \frac{1}{2}) > \log_4(2 - x) - 1$ 之解為何？

(A) $\frac{1}{2} < x < 2$

(B) $1 < x < \frac{3}{2}$

(C) $\frac{3}{2} < x < 2$

$$(D) \quad \frac{-1}{4} < x < 1$$

$$(E) \quad 1 < x < 2$$

Solution

考慮式子定義域： $\frac{1}{2} < x < 2$

$$\log_2\left(x - \frac{1}{2}\right) > \log_4(2 - x) - 1$$

$$\Rightarrow \log_2\left(x - \frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}\log_2(2 - x) - 1$$

$$\Rightarrow 2\log_2\left(x - \frac{1}{2}\right) > \log_2(2 - x) - 2$$

$$\Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} > \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} > 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 3x - 1 > 0$$

$$\Rightarrow (4x + 1)(x - 1) > 0$$

$$\Rightarrow x > 1 \cup \frac{-1}{4} < x$$

將結果與定義域取交集，得到 $1 < x < 2$ ，故選(E)

106-02-05

Statement

$$\text{求} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+3}} - \frac{1}{\sqrt{3x+1}}}{x^2 + x - 2} = ?$$

$$(A) \quad \frac{1}{48}$$

$$(B) \quad \frac{1}{40}$$

$$(C) \quad \frac{1}{32}$$

$$(D) \quad \frac{1}{24}$$

$$(E) \quad \frac{1}{16}$$

Solution 1

$$\text{令 } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ 則 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+3}} - \frac{1}{\sqrt{3x+1}}}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+3) - f(3x+1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$\text{令 } h = x - 1, \text{ 則 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+3) - f(3x+1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+4) - f(3h+4)}{h(h+3)}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+4) - f(3h+4)}{h(h+3)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+4) - f(3h+4)}{h} \cdot \frac{1}{h+3} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+4) - f(4) - f(3h+4) + f(4)}{h} \cdot \frac{1}{h+3} \\
&= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+4) - f(4)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h+4) - f(4)}{h} \right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h+3} \\
&= (f'(4) - 3f'(4)) \cdot \frac{1}{3} \\
&= -\frac{2}{3}f'(4) \\
&f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3}}, \quad -\frac{2}{3}f'(4) = \frac{1}{24}, \quad \text{故選}(D)
\end{aligned}$$

Solution 2

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+3}} - \frac{1}{\sqrt{3x+1}}}{x^2 + x - 2} \\
&\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{(x+3)(3x+1)}}}{x^2 + x - 2} \\
&\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{(x^2 + x - 2)\sqrt{3x^2 + 10x + 3}} \\
&\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 1 - x - 3}{(x^2 + x - 2)\sqrt{3x^2 + 10x + 3}(\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3})} \\
&\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{(x^2 + x - 2)\sqrt{3x^2 + 10x + 3}(\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3})} \\
&\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x+2)\sqrt{3x^2 + 10x + 3}(\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3})} \\
&\frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{24}, \quad \text{故選}(D)
\end{aligned}$$

106-02-06

Statement

若 $\frac{1}{\alpha}$ 和 $\frac{1}{\beta}$ 為方程式 $x(x-6) = -2$ 的兩根且 $\alpha > \beta$ ，則 $\alpha^2\beta - \alpha\beta^2 = ?$

- (A) $\frac{\sqrt{7}}{2}$
- (B) $\frac{\sqrt{7}}{3}$
- (C) $\frac{\sqrt{7}}{4}$
- (D) $\frac{\sqrt{7}}{5}$

$$(E) \frac{\sqrt{7}}{6}$$

Solution

$$x(x-6) = -2 \Rightarrow x^2 - 6x + 2 = 0$$

利用根與係數， $\frac{1}{\alpha\beta} = 2$ ， $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 6$

因此 $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = 6$ ，代入 $\frac{1}{\alpha\beta}$ 得 $\alpha+\beta = 3$ ，且 $\alpha\beta = \frac{1}{2}$

$$\alpha - \beta = \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2} = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{9 - 2} = \sqrt{7}$$

$$\alpha^2\beta - \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{7}}{2}，故選(A)$$

106-02-07

Statement

已知橢圓方程式為 $\frac{(x-1)^2}{a} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ 且其短軸平行 y 軸，若 $P(k, 2)$ 為橢圓上一點且 P 點到點 $(1, 2)$ 的距離不超過3，假設 a 為整數，則 a 有幾種可能？

(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 6

(E) 7

Solution

由方程式可知道原點為 $(1, 2)$

從題目上可知道 P 點到原點最長不超過3，因此可以知道 $\sqrt{a} < 3$ ，因此 $a < 9$

又因為方程式是橢圓且短軸平行 y 軸，因此 $a \geq 4$

故 $4 \leq a < 9$ ，共有5種可能，故選(C)

106-02-08

Statement

設直線 L 通過兩點 $(3, 0)$ 、 $(0, -4)$ ，直線 M 為通過點 $(-1, 1)$ 且與 L 垂直之直線，若 M 其方程式為 $ax + by = 1$ ，則 $a + b = ?$

(A) -7

(B) -1

(C) 1

(D) 3

(E) 7

Solution

L 通過兩點，因此可得 $L: y = \frac{0 - (-4)}{3 - 0}(x - 3) \Rightarrow -4x + 3y + 12 = 0$

則 M 垂直於 L ，因此 $M: 3x + 4y = d$ ，代入 $(-1, 1)$ 得到 $d = 1$ ，故 $M: 3x + 4y = 1$

因此 $3 + 4 = 7$ ，故選 (E)

106-02-09

Statement

若 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，且 $\log_a(\sqrt{2} - 1) = 2x$ ，求 $\frac{a^{-3x} - a^{3x}}{a^{-x} + a^x} = ?$

(A) $2 - \sqrt{2}$

(B) $3 - \sqrt{2}$

(C) $1 + \sqrt{2}$

(D) $2 + \sqrt{2}$

(E) $3 + \sqrt{2}$

Solution

$$\log_a(\sqrt{2} - 1) = 2x$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} - 1 = a^{2x}$$

$$\frac{a^{-3x} - a^{3x}}{a^{-x} + a^x} = \frac{a^{-2x} - a^{4x}}{1 + a^{2x}} = \frac{1 - a^{6x}}{a^{2x}(1 + a^{2x})} = \frac{1 - (\sqrt{2} - 1)^3}{(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2}} = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

$$= \frac{(8 - 5\sqrt{2})(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{2} = 3 - \sqrt{2}，故選 (B)$$

106-02-10

Statement

若拋物線 $x = \frac{1}{64}y^2$ 與直線 $x - \frac{1}{k}y + 1 = 0$ 有交點且 k 為整數，則 k 有幾種可能？

(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 8

(E) 9

Solution

$$x + 1 = \frac{1}{k}y$$

$$k(x + 1) = y$$

考慮直線與拋物線只有一個交點

$$x = \frac{1}{64}(k(x + 1))^2$$

$$x = \frac{1}{64}k^2(x^2 + 2x + 1)$$

$$64x = k^2x^2 + 2k^2x + k^2$$

$$k^2x^2 + (2k^2 - 64)x + k^2 = 0$$

則利用判別式，考慮 $b^2 - 4ac = 0$

$$(2k^2 - 64)^2 - 4 \times k^2 \times k^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4k^4 - 256k^2 + 4096 - 4k^4 = 0$$

$$\Rightarrow -256k^2 = -4096$$

$$\Rightarrow k^2 = 16, \text{ 得到 } k = \pm 4$$

因此只要 k 落在 $-4 \leq k \leq 4$ 的區間，且 $k \neq 0$ ，與拋物線均有交點，故答案為8，故選(D)

106-02-11

Statement

已知向量 $\vec{a} = \langle 3, 1 \rangle$ 、 $\vec{b} = \langle 2, 4 \rangle$ 。若 $|\vec{a} + t\vec{b}|$ 之最小值為何？

(A) $\sqrt{2}$

(B) $\sqrt{3}$

(C) 2

(D) $\sqrt{5}$

(E) $\sqrt{6}$

Solution

$$\vec{a} + t\vec{b} = \langle 3 + 2t, 1 + 4t \rangle$$

$$\text{因此考慮 } |\vec{a} + t\vec{b}| = \sqrt{(3 + 2t)^2 + (1 + 4t)^2} = \sqrt{9 + 12t + 4t^2 + 1 + 8t + 16t^2} = \sqrt{20t^2 + 20t + 10}$$

$$\text{對根號內的式子配方法，得到 } \sqrt{20\left(t^2 + t + \frac{1}{4}\right) - 5 + 10} = \sqrt{20\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + 5}$$

因此在 $t = -\frac{1}{2}$ 時，有最小值為 $\sqrt{5}$ ，故選(D)

106-02-12

Statement

若 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{3x+a-b}}{x} \right) = \frac{3}{4}$ ，求 $a+b=?$

(A) 6

(B) 9

(C) 12

(D) 15

(E) 18

Solution

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{3x+a-b}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3x+a-b^2}{(\sqrt{3x+a}+b)x} \right) = \frac{3}{4}$$

極限存在必要條件： $a-b^2=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{(\sqrt{3x+a}+b)} \right) = \frac{3}{\sqrt{a}+b} = \frac{3}{4}$$

得到 $\sqrt{a}+b=4$

兩式 $\begin{cases} a-b^2=0 \\ \sqrt{a}+b=4 \end{cases}$ 解聯立，得到 $(a,b)=(4,2)$

故 $a+b=6$ ，故選(A)

106-02-13

Statement

若 $\frac{x^4+2x^3+2x+2}{x^3-1} = f(x) + \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$ ，其中 $f(x)$ 為一次式且 a 、 b 為常數，則 $a+b=?$

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 2

Solution

$$\text{設 } f(x) = dx + e$$

$$\frac{x^4 + 2x^3 + 2x + 2}{x^3 - 1} = f(x) + \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

$$\Rightarrow x^4 + 2x^3 + 2x + 2 = (dx + e)(x^3 - 1) + a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x - 1)$$

$$\Rightarrow x^4 + 2x^3 + 2x + 2 = dx^4 - dx + ex^3 - e + ax^2 + ax + a + bx^2 - bx + cx - c$$

$$\Rightarrow x^4 + 2x^3 + 2x + 2 = dx^4 + ex^3 + (a+b)x^2 + (-d+a-b+c)x + (-e+a-c)$$

比較係數， $d = 1, e = 2$ ，且 $a + b = 0, -1 + a - b + c = 2, (-2 + a - c) = 2$ ，故選(C)

106-02-14

Statement

已知向量 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 2$ 且 $|\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}| = 0$ ，則 $|\vec{a} + 2\vec{b} + 5\vec{c}| = ?$

(A) $\sqrt{\frac{21}{2}}$

(B) $\sqrt{\frac{23}{2}}$

(C) $\sqrt{\frac{24}{2}}$

(D) $\sqrt{\frac{26}{2}}$

(E) $\sqrt{\frac{27}{2}}$

Solution

$$\text{已知 } |\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}| = 0$$

$$\text{因此 } \vec{a} + \vec{b} = -2\vec{c}$$

$$\text{則 } |\vec{a} + 2\vec{b} + 5\vec{c}| = |\vec{b} + 3\vec{c}|$$

$$\text{又 } \vec{b} + 2\vec{c} = -\vec{a}$$

$$|\vec{b}|^2 + 4(\vec{b} \cdot \vec{c}) + 4|\vec{c}|^2 = |-\vec{a}|^2 \Rightarrow (\vec{b} \cdot \vec{c}) = \frac{-21}{4}$$

$$|\vec{b} + 3\vec{c}| = \sqrt{|\vec{b}|^2 + 6(\vec{b} \cdot \vec{c}) + 9|\vec{c}|^2} = \sqrt{9 + \frac{-126}{4} + 36} = \sqrt{\frac{54}{4}} = \sqrt{\frac{27}{2}}，\text{故選(E)}$$

106-02-15

Statement

假設 $P(2, 0)$ 、 $Q(0, 2)$ 和 R 為圓 $x^2 + y^2 = 4$ 上三點，則三角形 PQR 最大面積為何？

- (A) 4
- (B) $2 + 2\sqrt{2}$
- (C) $4 + \sqrt{2}$
- (D) $4\sqrt{2}$
- (E) $4 + 4\sqrt{2}$

Solution 1

畫出圖可知，要使得最大面積， R 點一定在 PQ 線段中垂過圓心交於圓上的一點，得到等腰三角形 RPQ 。

$$\text{因此面積為 } \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2\sqrt{2}$$

Solution 2

$$\text{令 } R = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$$

$$\text{則面積為 } \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \cos \theta & 0 \\ 2 & 0 & 2 \sin \theta & 2 \end{vmatrix} = |2 \sin \theta + 2 \cos \theta - 2|$$

找出 $|2 \sin \theta + 2 \cos \theta - 2|$ 的最大值

$$-2\sqrt{2} \leq 2 \sin \theta + 2 \cos \theta \leq 2\sqrt{2}$$

$$-2\sqrt{2} - 2 \leq 2 \sin \theta + 2 \cos \theta - 2 \leq 2\sqrt{2} - 2$$

$$0 \leq |2 \sin \theta + 2 \cos \theta - 2| \leq 2\sqrt{2} + 2$$

所以面積最大值為 $2\sqrt{2} + 2$

106-02-16

Statement

下列哪一條直線為兩直線 $4x - 3y = 2$ 、 $3x - 4y = -7$ 的交角平分線方程式？

- (A) $x - y = -9$
- (B) $x - y = 9$
- (C) $x + y = -9$
- (D) $x + y = 9$
- (E) $7x - 7y = 5$

Solution

考慮一條線與兩直線等距，故

$$\frac{|4x - 3y - 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|3x - 4y + 7|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$4x - 3y - 2 = \pm(3x - 4y + 7)$$

得到直線為 $x + y - 9 = 0$ (鈍角) 或 $7x - 7y + 5 = 0$ (銳角)，故選 (D)

106-02-17

Statement

若 $f(x) = \log_{27} \sqrt[3]{g(x)}$ ，其中 $g(x) = x^4 + 5x^3 + 6x^2 + x - 1$ ，則 $f(\sqrt{3} - 1) = ?$

(A) $\frac{1}{6}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{5}{6}$

(D) 1

(E) $\sqrt{3}$

Solution

利用綜合除法，將 $x^4 + 5x^3 + 6x^2 + x - 1$ 以 $(x + 1)$ 的形式表現

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 5 & 6 & 1 & -1 & \\ & -1 & -4 & -2 & 1 & \\ \hline 1 & 4 & 2 & -1 & & \theta \\ & -1 & -3 & 1 & & \\ \hline 1 & 3 & -1 & & & \theta \\ & -1 & -2 & & & \\ \hline 1 & 2 & & & & -3 \\ & -1 & & & & \\ \hline & 1 & 1 & & & \end{array}$$

$$\text{得到 } g(x) = (x + 1)^4 + (x + 1)^3 - 3(x + 1)^2$$

$$\text{因此 } g(\sqrt{3} - 1) = 9 + 3\sqrt{3} - 9 = 3\sqrt{3}$$

$$f(\sqrt{3} - 1) = \log_{27} \sqrt[3]{g(\sqrt{3} - 1)} = \frac{1}{9} \log_3 3\sqrt{3} = \frac{1}{6}, \text{ 故選 (A)}$$

106-02-18

Statement

函數 $f(x) = \sin^2 x - \cos x + 1$ 的最大值為何？

(A) $\frac{5}{4}$

(B) $\frac{7}{4}$

(C) 2

(D) $\frac{9}{4}$

(E) 3

Solution

$$f(x) = \sin^2 x - \cos x + 1 = -\cos^2 x - \cos x + 2$$

$$\text{令 } t = \cos x, \text{ 則 } f(t) = -t^2 - t + 2 = -(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4}$$

考慮 $t = \frac{1}{2}$ 在 $\cos x$ 的值域內，因此最大值為 $\frac{9}{4}$ ，故選 (D)

106-02-19

Statement

若 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ 且 $f(g(x)) = \frac{x+1}{2x+1}$ ，求 $g(1) = ?$

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

Solution

$$\text{已知 } f(1) = 0, \text{ 且 } f(g(1)) = \frac{2}{3}$$

$$\text{考慮 } \frac{x-1}{x+1} = \frac{2}{3}, \text{ 得到 } x = 5$$

因此 $g(1) = 5$ ，故選 (E)

Statement

設 $4^{x+1} - 15 \cdot 2^{x+1} + 32 = 0$ 的兩根為 α 和 β ，則 $\alpha + \beta = ?$

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

Solution

$$4^{x+1} - 15 \cdot 2^{x+1} + 32 = 0$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 4^x - 30 \cdot 2^x + 32 = 0$$

$$\text{令 } t = 2^x, \text{ 則 } 4t^2 - 30t + 32 = 0 \Rightarrow 2t^2 - 15t + 16 = 0$$

$$\text{得到 } 2^\alpha + 2^\beta = \frac{15}{2} \text{ 且 } 2^\alpha \times 2^\beta = 2^{\alpha+\beta} = 8$$

因此 $\alpha + \beta = 3$ ，故選(C)

107年第1次北科入學數學會考

107-01-01

Statement

設橢圓 $9x^2 + 16y^2 - 18x - 135 = 0$ 的兩焦點為 F_1, F_2 ，點 P 在橢圓上，若 $\overline{PF_1} = 2$ ，則 $\overline{PF_2} = ?$

- (A) 1
- (B) 3
- (C) 5
- (D) 6
- (E) 8

Solution

$$9x^2 + 16y^2 - 18x - 135 = 0$$

利用配方法，改寫式子得 $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

$$\text{可得長軸} 2a = 2\sqrt{16} = 8$$

又因為 $\overline{FP_1} + \overline{FP_2} = 2a$ ，因此 $\overline{PF_2} = 8 - 2 = 6$ ，故選(D)

107-01-02

Statement

若 α, β 為方程式 $x + \frac{2}{x} + 1 = 0$ 的兩根，則 $\alpha^3\beta - \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = ?$

- (A) -10
- (B) -6
- (C) -2
- (D) 6
- (E) 10

Solution

$$x + \frac{2}{x} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x + 2 = 0$$

利用根與係數，可得 $\alpha + \beta = -1$ ，且 $\alpha\beta = 2$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$\alpha^3\beta - \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = \alpha\beta(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha\beta((\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta) = 2(1 - 6) = -10$ ，故選(A)

107-01-03

Statement

設 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ，其中 a 、 b 、 c 皆為實數。若不等式 $f(x) < 0$ 之解為 $x < -2$ 且 $f(2) = 0$ ，則 $3a + b + 2c = ?$

(A) 5

(B) 6

(C) 7

(D) 8

(E) 9

Solution

由題目的條件可以看出 $f(x) = (x + 2)(x - 2)^2$ ，展開後得到 $(x + 2)(x^2 - 4x + 4) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$
故 $3a + b + 2c = 3 \cdot (-2) - 4 + 2 \cdot 8 = 6$ ，故選(B)

107-01-04

Statement

若 $\triangle ABC$ 中，向量 $\vec{AB} = \langle 3, -2 \rangle$ 、 $\vec{BC} = \langle x, -1 \rangle$ 、 $\vec{CA} = \langle 4, y \rangle$ ，則 $y - x = ?$

(A) -10

(B) -4

(C) 4

(D) 10

(E) 20

Solution

$\vec{CA} = \langle 4, y \rangle \Rightarrow \vec{AC} = \langle -4, -y \rangle$

因此 $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ ，也就是 $\langle 3 + x, -2 - 1 \rangle = \langle -4, -y \rangle$ ，得到 $x = -7$ 且 $y = 3$

因此 $y - x = 3 - (-7) = 10$ ，故選(D)

107-01-05

Statement

若 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ ，則 $\sin \theta + \cos \theta$ 可能為下列何者？

(A) -1

(B) $-\frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(E) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

Solution

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$\text{故 } \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8}$$

$$\text{因此 } \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{(\sin \theta - \cos \theta)^2 + 4 \sin \theta \cos \theta} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{12}{8}} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}, \text{ 故選 (E)}$$

107-01-06

Statement

若拋物線 $y = 2x^2 + bx + c$ 的頂點為 $(1, 4)$ ，則 $2b + c = ?$

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 2

Solution

$$y = 2x^2 + bx + c \Rightarrow y = 2\left(x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{b^2}{4}\right) + \frac{b^2}{2} + c = 2\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{2} + c$$

$$\text{可得 } \frac{b}{2} = -1, \text{ 因此 } b = -2, \text{ 又 } \frac{b^2}{2} + c = 4, \text{ 得到 } c = 2$$

$$\text{故 } 2b + c = -4 + 2 = -2, \text{ 故選 (A)}$$

107-01-07

Statement

設 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 為鈍角， $|\vec{AB}| = 6$ 、 $|\vec{AC}| = 7$ 。若 $\triangle ABC$ 的面積為 $7\sqrt{5}$ ，則 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = ?$

- (A) -28
 (B) -14
 (C) -7
 (D) 14
 (E) 28

Solution

$$\Delta_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin \theta = 7\sqrt{5}, \text{ 可得 } \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}, \text{ 推得 } \cos \theta = -\frac{2}{3}$$

$$\text{則 } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| |\vec{AC}| \cos \theta = 42 \cdot \frac{-2}{3} = -28, \text{ 故選(A)}$$

107-01-08

Statement

若 $\cot \frac{5\pi}{8} = k$ ，則 $\csc \frac{\pi}{8} = ?$

- (A) $-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$
 (B) $-\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}$
 (C) k
 (D) $\frac{k}{1+k^2}$
 (E) $\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}$

Solution

$$\cot\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\tan \frac{\pi}{8} = k$$

因此 $\tan \frac{\pi}{8} = -k$ ，可得對邊 $-k$ ，鄰邊 1 ，且斜邊 $\sqrt{k^2+1}$

$$\text{因此 } \csc \frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{k^2+1}}{k}. \text{ 故選(B)}$$

107-01-09

Statement

設 x 、 y 、 z 皆為實數，且 $xyz \neq 0$ 。若 $8^x = 9^y = 5^z = a$ ，且 $\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ ，則 a 為何？

- (A) 500
- (B) 600
- (C) 700
- (D) 800
- (E) 900

Solution

$$8^x = 9^y = 5^z = a$$

$$\Rightarrow x \log 8 = y \log 9 = z \log 5 = \log a$$

$$\text{可得 } x = \frac{\log a}{\log 8}, y = \frac{\log a}{\log 9}, z = \frac{\log a}{\log 5}$$

$$\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{z} = \frac{\log 8}{3 \log a} + \frac{\log 9}{2 \log a} + \frac{\log 5}{\log a} = \frac{2 \log 8 + 3 \log 9 + 6 \log 5}{6 \log a} = \frac{1}{2}$$

$$\text{因此 } \frac{2}{3} \log 8 + \log 9 + 2 \log 5 = \log a$$

$$\text{可得 } a = 8^{\frac{2}{3}} \cdot 9 \cdot 25 = 900, \text{ 故選 (E)}$$

107-01-10

Statement

若 $a + 2b = 10$ ，則 $a^2 + b^2$ 的最小值為何？

- (A) 10
- (B) 15
- (C) 20
- (D) 25
- (E) 30

Solution

利用柯西不等式，得到 $(1^2 + 2^2)(a^2 + b^2) \geq (a + 2b)^2$

因此可知 $(a^2 + b^2) \geq 20$ ， $a^2 + b^2$ 的最小值為 20，故選 (C)

107-01-11

Statement

設 $f(n) = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ ，求 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(15) = ?$

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

Solution

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(15)$ 可推得規律得 $-\sqrt{1} + \sqrt{16} = 3$ ，故選(C)

107-01-12

Statement

若 $x^2 - x - 2$ 除 $x^4 + x^3 + ax^2 + x + b$ 的餘式為 $x + 1$ ，則 $a^2 + b^2 = ?$

- (A) 145
- (B) 146
- (C) 147
- (D) 148
- (E) 149

Solution

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$$

$$\text{設 } x^4 + x^3 + ax^2 + x + b = g(x)(x - 2)(x + 1) + (x + 1)$$

$$\text{令 } x = 2, \text{ 得 } 4a + b + 26 = 3$$

$$\text{令 } x = -1, \text{ 得 } a + b - 1 = 0$$

$$\text{解聯立方程組 } \begin{cases} a + b = -23 \\ a + b = 1 \end{cases} \text{ 可得 } (a, b) = (-8, 9)$$

因此 $a^2 + b^2 = 64 + 81 = 145$ ，故選(A)

107-01-13

Statement

若 $f(x) = x^4 - 9x^3 + 5x^2 - 3x + 16$ ，則 $f(5 - 2\sqrt{3}) = ?$

- (A) $6 - 4\sqrt{3}$
- (B) $8 - 6\sqrt{3}$
- (C) $10 - 8\sqrt{3}$
- (D) $12 - 10\sqrt{3}$
- (E) $14 - 12\sqrt{3}$

Solution

考慮以 $x - 5$ 來表示 $x^4 - 9x^3 + 5x^2 - 3x + 16$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 1 & -9 & 5 & -3 & 16 & \\
 & 5 & -20 & -75 & -390 & 5 \\
 \hline
 1 & -4 & -15 & -78 & -374 & \\
 & 5 & 5 & -50 & & \\
 \hline
 1 & 1 & -10 & -128 & & \\
 & 5 & 30 & & & \\
 \hline
 1 & 6 & 20 & & & \\
 & 5 & & & & \\
 \hline
 1 & 11 & & & &
 \end{array}$$

可得 $f(x) = (x - 5)^4 + 11(x - 5)^3 + 20(x - 5)^2 - 128(x - 5) - 374$

因此 $f(5 - 2\sqrt{3}) = 144 - 264\sqrt{3} + 240 + 256\sqrt{3} - 374 = 10 - 8\sqrt{3}$ ，故選(C)

107-01-14

Statement

若拋物線 $y = x^2 + kx + 2$ 恆在直線 $x + y - 1 = 0$ 之上方，則 k 的範圍為何？

- (A) $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$
- (B) $k < -\sqrt{2}$ 或 $k > \sqrt{2}$
- (C) $-2 < k < 2$
- (D) $-3 < k < 1$
- (E) $k < -3$ 或 $k > 1$

Solution

$$x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = -x + 1$$

$$\text{因此 } y = x^2 + kx + 2$$

$$\Rightarrow -x + 1 = x^2 + kx + 2$$

$$\Rightarrow x^2 + (k+1)x + 1 = 0$$

利用判別式來考慮交點，也就是

$$(k+1)^2 - 4 \times 1 \times 1 < 0$$

$$\Rightarrow (k+1)^2 < 4$$

$$\Rightarrow -3 < k < 1, \text{ 故選}(D)$$

107-01-15

Statement

$$\frac{\log 3 \cdot \log_6 25 \cdot \log_7 8}{\log_7 5 \cdot \log 2 \cdot \log_6 27} = ?$$

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

Solution

$$\frac{\log 3 \cdot \log_6 25 \cdot \log_7 8}{\log_7 5 \cdot \log 2 \cdot \log_6 27} = \frac{\log 3 \cdot 2 \log_6 5 \cdot 3 \log_7 2}{\log_7 5 \cdot \log 2 \cdot 3 \log_6 3} = \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{2 \log 5}{3 \log 3} \cdot \frac{3 \log 2}{\log 5} = 2, \text{ 故選}(B)$$

107-01-16

Statement

設兩向量 \vec{a} 、 \vec{b} 的夾角為 $\frac{\pi}{3}$ 。若 $|\vec{a}| = 3$ 、 $|\vec{b}| = 2$ ，則 $|3\vec{a} - 4\vec{b}| = ?$

(A) 5

(B) $\sqrt{53}$

(C) 8

(D) $\sqrt{73}$

(E) 9

Solution

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

$$\text{因此 } |3\vec{a} - 4\vec{b}| = \sqrt{(3\vec{a} - 4\vec{b})^2} = \sqrt{9|\vec{a}|^2 - 24(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 16|\vec{b}|^2}$$

$$= \sqrt{9 \times 9 - 24 \times 3 + 16 \times 4} = \sqrt{81 - 72 + 64} = \sqrt{73}, \text{ 故選}(D)$$

107-01-17

Statement

$$\text{若 } \frac{ax^2 + bx + c}{(x+2)(x+1)^2} = \frac{-1}{x+2} + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}, \text{ 則 } 3a + 2b + c = ?$$

(A) 16

(B) 17

(C) 18

(D) 19

(E) 20

Solution

$$ax^2 + bx + c = -1(x+1)^2 + 2(x+2)(x+1) + (x+2)$$

$$= x^2 + 5x + 5$$

$$\text{因此 } a = 1, b = 5, c = 5, 3a + 2b + c = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 5 = 18, \text{ 故選}(C)$$

107-01-18

Statement

$$\text{若 } \log(1 + \cos \theta) + \log\left(\frac{1}{4} - \cos \theta\right) = \log\left(-\frac{3}{4}\cos \theta\right), \text{ 則 } \theta \text{ 可能為下列何者?}$$

(A) $-\frac{\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{6}$

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{2\pi}{3}$

(E) $\frac{5\pi}{6}$

Solution

$$\log(1 + \cos \theta) + \log\left(\frac{1}{4} - \cos \theta\right) = \log\left(-\frac{3}{4}\cos \theta\right)$$

$$\Rightarrow (1 + \cos \theta)\left(\frac{1}{4} - \cos \theta\right) = -\frac{3}{4}\cos \theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\cos \theta - \cos^2 \theta = -\frac{3}{4}\cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{1}{2}$$

考慮 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ，會使得 $\frac{1}{4} - \cos \theta < 0$ ，故不合。

因此 $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ ，得到 $\theta = \frac{4\pi}{3}$ 或 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ，故選(D)

107-01-19

Statement

設 $P(4, 3)$ 、 $Q(4, -2)$ 、 $R(1, 2)$ 為平面上三點，求點 P 到直線 \overleftrightarrow{QR} 的距離

(A) 2

(B) $\sqrt{5}$

(C) 3

(D) 5

(E) $\sqrt{26}$

Solution

$$\Delta PQR = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{15}{2}$$

$$\text{又 } \overline{QR} = \sqrt{(4-1)^2 + (-2-2)^2} = 5$$

設 \overline{QR} 上有一點 S 使得 $\overline{PS} \perp \overline{QR}$

因此 $\frac{1}{2} \times \overline{PS} \times \overline{QR} = \frac{15}{2}$ ，得到 $\overline{PS} = 3$ ，故選(C)

107-01-20

Statement

若 α 為方程式 $\log_3(x+2) = 2 - \log_3(x-6)$ 之根，則下列何者為 α 之倍數？

(A) 6

(B) 8

(C) 10

(D) 12

(E) 14

Solution

$$\log_3(x+2) = 2 - \log_3(x-6)$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-6) = 3^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$\Rightarrow (x-7)(x+3) = 0$$

因此 $x = 7$ 或 $x = -3$ (不合), 故選 (E)

107年第2次北科入學數學會考

107-02-01

Statement

設拋物線 $y = ax^2 + bx - c$ ， a 、 b 、 c 皆為正實數，則下列敘述何者正確？

- (A) 開口向下
- (B) 與 x 軸無交點
- (C) 交於正 y 軸
- (D) 頂點在第三象限
- (E) 準線平行 y 軸

Solution

$$y = ax^2 + bx - c$$

$$\Rightarrow y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} - c$$

$$\Rightarrow y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{b^2}{4a} - c$$

因此可知頂點為 $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 + 4ac}{4a}\right)$ ，必在第三象限，故選(D)

107-02-02

Statement

$(150x^5 - 312x^4 + 28x^3 - 13x - 9) \div (x - 2)$ 的餘式為何？

- (A) -19
- (B) -3
- (C) -1
- (D) 1
- (E) 3

Solution

利用綜合除法

$$\begin{array}{r}
 150 \quad -312 \quad 28 \quad 0 \quad -13 \quad -9 \\
 \quad 300 \quad -24 \quad 8 \quad 16 \quad 6 \\
 \hline
 150 \quad -12 \quad 4 \quad 8 \quad 3 \quad -3
 \end{array} \Bigg| 2$$

可得餘式為 -3 ，故選(B)

107-02-03

Statement

設 $Q(a, b)$ 為直線 $L: 2x - y = 4$ 到 $P(1, 3)$ 的最近點，則 $a + b = ?$

(A) 2

(B) $\frac{7}{2}$

(C) 5

(D) $\frac{13}{2}$

(E) 7

Solution

考慮做一直線 M 垂直直線 L ，且過點 $(1, 3)$

因此直線 $M: x + 2y = d$ ，代入 $(1, 3)$ 得到 $d = 7$

找直線 L 與直線 M 的交點，解聯立方程組 $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (3, 2)$

因此 $Q(a, b) = (3, 2)$ ， $a + b = 5$ ，故選(C)

107-02-04

Statement

設有一橢圓中心在 $(1, 1)$ ，其長軸平行 x 軸且長軸長為短軸長的3倍，並通過 $(4, 0)$ ，則短軸長為何？

(A) $2\sqrt{2}$

(B) $2\sqrt{3}$

(C) $2\sqrt{5}$

(D) $2\sqrt{6}$

(E) $4\sqrt{2}$

Solution

設 $2a = 3 \times 2b = 6b$ ，因此 $a = 3b$

可列式 $\frac{(x-1)^2}{9b^2} + \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$

代入 $(4, 0)$ 可得 $b = \sqrt{2}$ ，因此短軸長 $2b = 2\sqrt{2}$ ，故選(A)

107-02-05

Statement

若直線 $3x + 4y + k = 0$ 與圓 $x^2 + y^2 + 8x + 16y - 20 = 0$ 相切且 $k < 0$ ，則 $k = ?$

(A) -8

(B) -6

(C) -4

(D) -3

(E) -2

Solution

$$x^2 + y^2 + 8x + 16y - 20 = 0$$

透過配方法後可得 $(x+4)^2 + (y+8)^2 = 100$

可得半徑為10且中心為 $(-4, -8)$

考慮直線與圓相切，因此直線與中心相隔的距離為10

利用點到直線公式， $\frac{|3x + 4y + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 10$

將 x, y 代入 $(-4, -8)$ ，得到 $|-44 + k| = 50$ ，因此 $k = -6$ 或 $k = 94$ (不合)，故選(B)

107-02-06

Statement

設 $\vec{a} = \langle 1, t-1 \rangle$ 、 $\vec{b} = \langle 2t-2, t+2 \rangle$ 。若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 且 $|\vec{b}| > 2$ ，則 $t = ?$

(A) -4

(B) -1

(C) 1

(D) 2

(E) 4

Solution

已知 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，因此 $2t - 2 + (t + 2)(t - 1) = t^2 + 3t - 4 = (t + 4)(t - 1) = 0$

故 $t = -4$ 或 $t = 1$

考慮 $t = 1$ ，得到 $\vec{b} = \langle 0, 3 \rangle = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$

考慮 $t = -4$ ，得到 $\vec{b} = \langle -10, -2 \rangle = \sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{104}$

故兩者皆可，故選(A), (C)

107-02-07

Statement

設 $f(x) = (5^{2x} + 5^{-2x}) - (5^x + 5^{-x}) + 3$ ，則 $f(x)$ 的最小值為何？

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

Solution

令 $t = 5^x + 5^{-x}$ ，則 $t^2 = 5^{2x} + 5^{-2x} + 2$

因此 $f(t) = t^2 - t + 1 = (t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

利用算幾不等式，得到 $\frac{5^x + 5^{-x}}{2} \geq \sqrt{1}$ ，得到 t 的最小值域為2，故 $t = \frac{1}{2}$ 不在值域內。

將2帶入 $f(t)$ 得到 $f(2) = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$ ，故選(C)

107-02-08

Statement

不等式 $x^2 - 4x + 2 \geq |x - 2|$ 的解為何？

(A) $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$

(B) $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

(C) $(-\infty, 0] \cup [4, \infty)$

(D) $(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$

(E) $(-\infty, 1] \cup [4, \infty)$

Solution

考慮 $|x - 2| = x - 2$ ，則

$$x^2 - 4x + 2 \geq x - 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 \geq 0$$

$$\Rightarrow (x - 4)(x - 1) \geq 0$$

$$\Rightarrow x \geq 4 \text{ 或 } x \leq 1$$

考慮 $|x - 2| = -x + 2$ ，則

$$x^2 - 4x + 2 \geq -x + 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x \geq 0$$

$$\Rightarrow x(x - 3) \geq 0$$

$$\Rightarrow x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 3$$

兩種結果取交集，得到 $(-\infty, 0] \cup [4, \infty)$ ，故選(C)

107-02-09

Statement

設 $a = \log \frac{4}{3}$ 、 $b = \log \frac{2}{3}$ ，則 $\log 24 = ?$

(A) $2a - 5b$

(B) $3a - 5b$

(C) $4a - 5b$

(D) $4a - 4b$

(E) $4a - 3b$

Solution

$$4a - 5b = 4 \log \frac{4}{3} - 5 \log \frac{2}{3} = \log \left(\left(\frac{4}{3} \right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^5 \right) = \log 3 \cdot 2^3 = \log 24，故選(C)$$

107-02-10

Statement

設方程式 $3^{x^2} \cdot (3^x)^2 = 27$ 之所有解為 α 與 β ，則 $\alpha^2 + \beta^2 = ?$

(A) 10

(B) 11

(C) 12

(D) 13

(E) 14

Solution

$$3^{x^2} \cdot (3^x)^2 = 27$$

$$\Rightarrow 3^{x^2} \cdot 3^{2x} = 3^3$$

$$\Rightarrow 3^{x^2+2x-3} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x+3)(x-1) = 0$$

可得 $x = 1$ 或 $x = -3$

因此 $\alpha^2 + \beta^2 = (1)^2 + (-3)^2 = 10$ ，故選(A)

107-02-11

Statement

$$\sin(-23^\circ) \sin 367^\circ + \cos 7^\circ \sin(-247^\circ) = ?$$

(A) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

(B) $\frac{-1}{2}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution

$$\sin(-23^\circ) \sin 367^\circ + \cos 7^\circ \sin(-247^\circ)$$

$$= -\sin(23^\circ) \sin 7^\circ + \cos 7^\circ \cos(23^\circ)$$

$$= \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 故選(E)}$$

Statement

若 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(3x-1) - f(x+1)}{x-1} = ?$

- (A) $\sqrt{2}$
 (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 (C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
 (D) $\frac{-\sqrt{2}}{4}$
 (E) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$

Solution

$$\begin{aligned} \text{令 } h = x - 1, \text{ 則 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(3x-1) - f(x+1)}{x-1} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h+2) - f(h+2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h+2) - f(2) - f(h+2) + f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h+2) - f(2)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+2) - f(2)}{h} \\ &= 3 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h+2) - f(2)}{3h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+2) - f(2)}{h} \\ &= 3 \cdot f'(2) - f'(2) = 2f'(2) = 2 \cdot -\frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4}, \text{ 故選 (D)} \end{aligned}$$

Statement

若甲乙兩人解方程式 $x^2 + mx + n = 0$ ，甲看錯 m 解得兩根為 $-3, 5$ ，乙看錯 n 解得兩根為 $-4, 2$ ，則原方程式的兩根為何？

- (A) $-3, -4$
 (B) $-3, 2$
 (C) $-4, 5$
 (D) $2, 5$
 (E) $3, -5$

Solution

甲的方程式為 $(x+3)(x-5) = x^2 - 2x - 15$

乙的方程式為 $(x+4)(x-2) = x^2 + 2x - 8$

因此可得原方程式為 $x^2 + 2x - 15 = (x+5)(x-3)$ ，解為 $x = -5$ 或 $x = 3$ ，故選(E)

107-02-14

Statement

設 $\frac{x^2 + x - 3}{(x-1)^2(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1}$ ，則 $B = ?$

(A) -7

(B) -5

(C) -3

(D) -1

(E) 2

Solution

$$\frac{x^2 + x - 3}{(x-1)^2(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1}$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 3 = A(x^2 - x + 1)(x-1) + B(x^2 - x + 1) + (Cx + D)(x-1)^2$$

故代 $x = 1$ ，得 $-1 = B$ ，故選(D)

107-02-15

Statement

設直線 L 通過 $P(1, 6)$ 且與第二象限所圍的三角形面積為4，則直線 L 的方程式為

(A) $4x - y = 2$

(B) $x + 4y = 5$

(C) $2x - y = -4$

(D) $2x + y = 8$

(E) $4x + y = 4$

Solution

令 $L: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ，又已知 $ab = -8$ ，得 $a = \frac{-8}{b}$

將 L 代入 $P(1, 6)$ ， $L: \frac{1}{a} + \frac{6}{b} = 1$

代入 $a = \frac{-8}{b}$ ， $L: -\frac{b}{8} + \frac{6}{b} = 1$

$$\Rightarrow \frac{-b^2}{8} + 6 = b$$

$$\Rightarrow -b^2 - 8b + 48 = 0$$

$$\Rightarrow (b + 12)(b - 4) = 0$$

得到 $b = 4$ 或 $b = -12$ (不合， $ab > 0$)

因此 $a = -2$ ，代入得 $2x - y = -4$ ，故選 (C)

107-02-16

Statement

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + x) = ?$

(A) 2

(B) 1

(C) -1

(D) -2

(E) 不存在

Solution

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + x)$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x}} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - 1} = \frac{2}{-2} = -1, \text{ 故選 (C)}$$

Statement

設 $a = \log 2$ 、 $b = \log 3$ 。若 x 滿足 $5^x - 6 \cdot 5^{-x} = 1$ ，則 $x = ?$

(A) $\frac{a}{1+b}$

(B) $\frac{b}{1+a}$

(C) $\frac{b}{a}$

(D) $\frac{b}{1-a}$

(E) $\frac{a}{1-b}$

Solution

$$5^x - 6 \cdot 5^{-x} = 1$$

$$\Rightarrow 5^{2x} - 6 = 5^x$$

$$\Rightarrow 5^{2x} - 5^x - 6 = 0$$

設 $t = 5^x$ ，則

$$t^2 - t - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (t-3)(t+2) = 0$$

得到 $t = -2$ (不合) 或 $t = 3$

還原 t 得到 $x = \log_5 3 = \frac{b}{1-a}$ ，故選 (D)

Statement

函數 $f(x) = \tan^2 x - \sec x + 4$ 之最小值為何？

(A) $\frac{11}{4}$

(B) 3

(C) $\frac{13}{4}$

(D) $\frac{7}{2}$

(E) $\frac{15}{4}$

Solution

$$\begin{aligned}f(x) &= \tan^2 x - \sec x + 4 \\&= \sec^2 x - 1 - \sec x + 4 \\&= \sec^2 x - \sec x + 3 \\&= \left(\sec^2 x - \sec x + \frac{1}{4}\right) + 3 - \frac{1}{4} \\&= \left(\sec x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}\end{aligned}$$

由於 $\sec x$ 的值域為 $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ ，因此 $\frac{1}{2}$ 不在 $\sec x$ 的值域內

從值域考慮 $\sec x = 1$ ，得最小值為3，故選(B)

107-02-19

Statement

設 $f(x) = \sqrt{5-x}$ 、 $g(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$ ，則合成函數 $g \circ f$ 的定義域為何？

- (A) $(-4, 5]$
- (B) $[-4, 5)$
- (C) $[-4, 3)$
- (D) $(-4, 3]$
- (E) $[3, 5]$

Solution

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{3 - \sqrt{5-x}}}$$

考慮 $\sqrt{3 - \sqrt{5-x}} > 0$ ，則 $3 - \sqrt{5-x} > 0$ ，得到 $x > -4$

考慮 $\sqrt{5-x}$ 裡面的值必須要是非負整數，因此 $x \leq 5$

兩者取交集得到 $(-4, 5]$ ，故選(A)

107-02-20

Statement

若 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + (a-3)x - 3a}{x^2 + 3x + 2} = b$ ，則 $ab = ?$

- (A) 2
- (B) 4
- (C) 6
- (D) 8

(E) 10

Solution

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + (a-3)x - 3a}{x^2 + 3x + 2} = b$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + (a-3)x - 3a}{(x+2)(x+1)} = b$$

考慮到極限存在，則分子必須要能被 $(x+2)$ 整除

因此 $4 + (-2)(a-3) - 3a = 0$ ，得到 $a = 2$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x + 2} = b$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-3)(x+2)}{(x+2)(x+1)} = 5$$

故 $b = 5$ ，因此 $ab = 10$ ，故選(E)

108年第1次北科入學數學會考

108-01-01

Statement

若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 除以 $(x-2)$ 的餘式分別為 5 、 -2 ，則 $(x^2-x+1)f(x)+(x-3)g(x)$ 除以 $(x-2)$ 的餘式為何？

(A) 11

(B) 13

(C) 15

(D) 17

(E) 19

Solution

利用餘式定理，將 $(x^2-x+1)f(x)+(x-3)g(x)$ 代入2

得到 $3 \cdot 5 + (-1) \cdot (-2) = 17$ ，故選(D)

108-01-02

Statement

若 a 、 b 均為實數，且 $ax^2+bx-5 < 0$ 之解為 $\frac{-1}{2} < x < \frac{5}{3}$ ，則 $a+b=?$

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 2

Solution

透過 $\frac{-1}{2} < x < \frac{5}{3}$ ，可知兩根為 $\frac{-1}{2}$ 與 $\frac{5}{3}$

利用根與係數

$$\frac{-5}{a} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{-5}{6}, \text{ 得到 } a = 6$$

$$-\frac{b}{6} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{3} = \frac{7}{6}, \text{ 得到 } b = -7$$

因此 $a+b = -1$ ，故選(B)

108-01-03

Statement

若 $\sum_{k=1}^9 a_k = 7$ 、 $\sum_{k=1}^{11} b_k = 5$ ，且 $a_{10} = 5$ 、 $b_{11} = -3$ ，則 $\sum_{k=1}^{10} (5a_k - 4b_k + 3) = ?$

(A) 56

(B) 57

(C) 58

(D) 59

(E) 60

Solution

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{10} (5a_k - 4b_k + 3) \\ &= 5 \cdot \sum_{k=1}^{10} a_k - 4 \cdot \sum_{k=1}^{10} b_k + \sum_{k=1}^{10} 3 \\ &= 5 \left(\sum_{k=1}^9 a_k + a_{10} \right) - 4 \left(\sum_{k=1}^{11} b_k - b_{11} \right) + \sum_{k=1}^{10} 3 \\ &= 5 \cdot 12 - 4 \cdot (5 - (-3)) + 30 = 58, \text{ 故選(C)} \end{aligned}$$

108-01-04

Statement

若 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 且 $\tan \theta + \sec \theta = \frac{3}{2}$ ，則 $\sin \theta = ?$

(A) $\frac{2}{13}$ (B) $\frac{3}{13}$ (C) $\frac{4}{13}$ (D) $\frac{5}{13}$ (E) $\frac{6}{13}$

Solution

$$\tan \theta + \sec \theta = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta + 1}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 \theta + 2 \sin \theta + 1}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow 4 \sin^2 \theta + 8 \sin \theta + 4 = 9 - 9 \sin^2 \theta$$

$$\Rightarrow 13 \sin^2 \theta + 8 \sin \theta - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (13 \sin \theta - 5)(\sin \theta + 1) = 0$$

得到 $\sin \theta = \frac{5}{13}$ 或 $\sin \theta = -1$ (不合), 故選 (D)

108-01-05

Statement

在座標平面上, 由二元一次聯立不等式 $\begin{cases} x \geq 0, y \geq -2 \\ x + 2y - 2 \leq 0 \\ x + y - 2 \leq 0 \end{cases}$ 所圍成區域的面積為何?

(A) 5

(B) 7

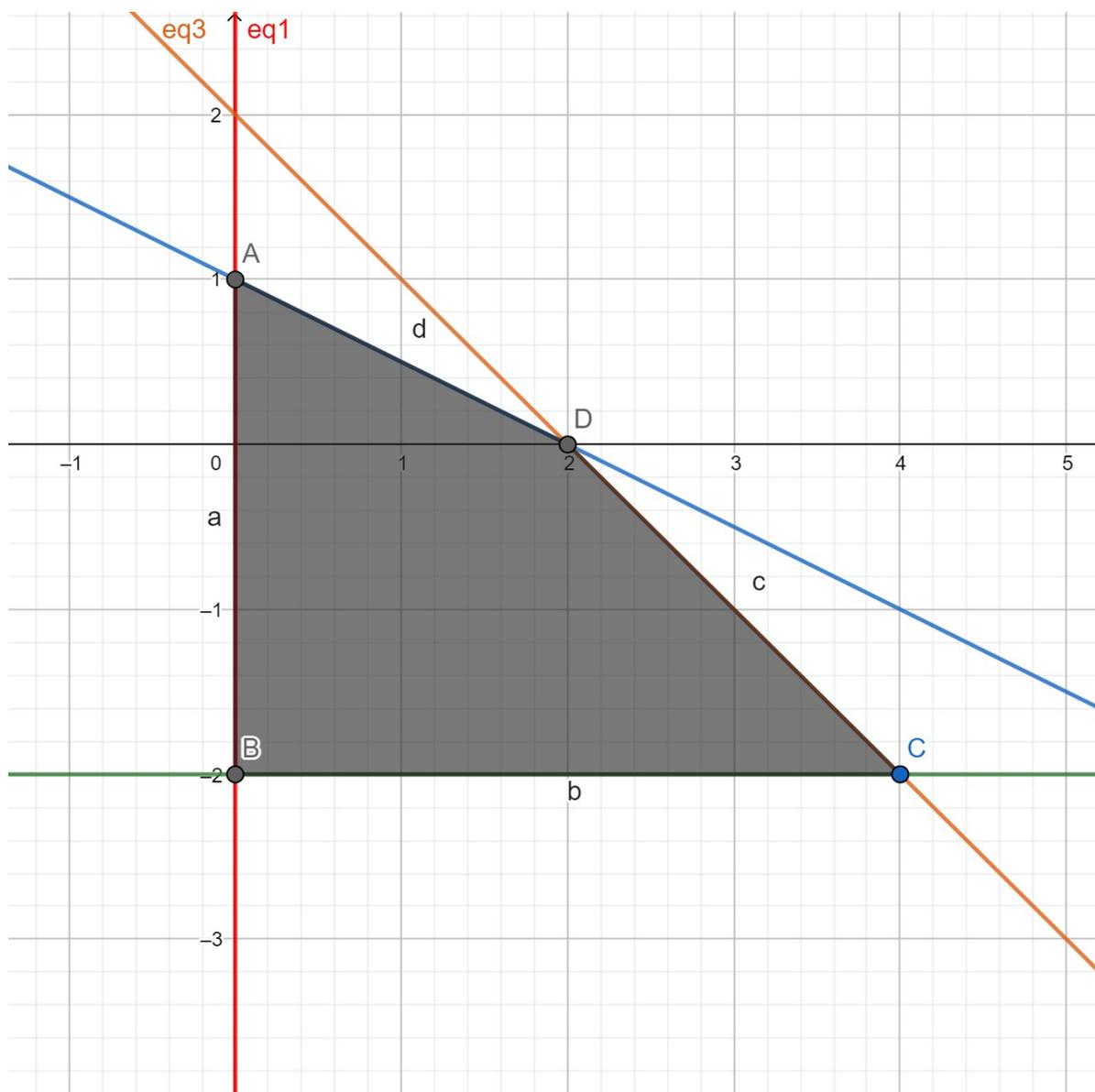
(C) 9

(D) 12

(E) 14

Solution

畫圖



因此面積為 $\frac{(2+4) \times 2}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 7$ ，故選(B)

108-01-06

Statement

若 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 且 $\cos 4\theta = \sin 2\theta$ ，則 $\tan 2\theta = ?$

- (A) $\frac{1}{2}$
- (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
- (C) 1
- (D) $\sqrt{3}$
- (E) 2

Solution

$$\cos 4\theta = \sin 2\theta$$

$$\Rightarrow \cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta = \sin 2\theta$$

$$\Rightarrow 1 - 2\sin^2 2\theta = \sin 2\theta$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 2\theta + \sin 2\theta - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2\sin 2\theta - 1)(\sin 2\theta + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2} \text{ 或 } \sin 2\theta = -1 \text{ (不合)}$$

$$\text{故 } \cos 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 因此 } \tan 2\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ 故選 (B)}$$

108-01-07

Statement

若兩圓 $C_1: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ 與 $C_2: (x+2)^2 + (y-2)^2 = k$ 相交，則實數 k 的面積為何？

(A) $2 \leq k \leq 4$

(B) $3 \leq k \leq 7$

(C) $4 \leq k \leq 25$

(D) $5 \leq k \leq 36$

(E) $9 \leq k \leq 49$

Solution

由方程式可知道

C_1 的圓心為 $(2, -1)$ ， C_2 的圓心為 $(-2, 2)$

因此兩圓心的距離為 $\sqrt{(2 - (-2))^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$

考慮 C_2 到 C_1 的最短距離，也就是 $5 - \sqrt{4} = 3$

考慮 C_2 到 C_1 的最長距離，也就是 $5 + \sqrt{4} = 7$

因此 k 的範圍為 $9 \leq k \leq 49$ ，故選 (E)

108-01-08

Statement

若兩向量 \vec{a} 、 \vec{b} 的夾角為 θ ，且 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 、 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$ 、 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{2}$ ，則 $\cos \theta = ?$

(A) $\frac{3}{5}$

(B) $\frac{3}{7}$

$$(C) \frac{5}{7}$$

$$(D) \frac{5}{9}$$

$$(E) \frac{7}{9}$$

Solution

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 7$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 2$$

$$\text{可得 } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{5}{4} \text{ 且 } |\vec{a}|^2 = \frac{9}{4}$$

$$\text{又 } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = |\vec{a}|^2 \cos \theta = \frac{5}{4}$$

$$\text{可得 } \cos \theta = \frac{5}{9}, \text{ 故選 } (D)$$

108-01-09

Statement

若直線 $ax + by - ab = 0$ ($a > 0, b < 0$) 過點 $(-3, -1)$ ，且此直線與兩座標軸圍起來的三角形面積為 6，則 $a = ?$

$$(A) 2 - 2\sqrt{2}$$

$$(B) 2\sqrt{2} - 2$$

$$(C) 2 - \sqrt{2}$$

$$(D) 2 + \sqrt{2}$$

$$(E) 2 + 2\sqrt{2}$$

Solution

$$ax + by - ab = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1 \text{ (截距式)}$$

已知直線與兩座標軸圍起來的三角形面積為 6，因此 $\frac{-ab}{2} = 6$ ，故 $-ab = 12$ ，得 $b = \frac{-12}{a}$

$$\text{代入截距式，得到 } -\frac{ax}{12} + \frac{y}{a} = 1$$

$$\text{直線過點 } (-3, -1), \text{ 得 } \frac{3a}{12} - \frac{1}{a} = 1$$

$$\Rightarrow 3a^2 - 12a - 12 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a - 4 = 0$$

利用公式解得 $a = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{2}$ (負不合)

因此 $a = 2 + 2\sqrt{2}$ ，故選(E)

108-01-10

Statement

若 a 、 b 、 c 皆為整數，且 $x^3 - x^2 - 3x + 2 = (x + a)(x^2 + bx + c)$ ，則 $a - b + c = ?$

(A) -4

(B) -2

(C) 0

(D) 2

(E) 4

Solution

$$x^3 - x^2 - 3x + 2 = (x + a)(x^2 + bx + c)$$

考慮以下所有有可能為 $x^3 - x^2 - 3x + 2$ 的因式

若因式為 $x + 1$ ，則 $-1 - 1 + 3 + 2 \neq 0$

若因式為 $x - 1$ ，則 $1 - 1 - 3 + 2 \neq 0$

若因式為 $x + 2$ ，則 $-8 - 4 + 6 + 2 \neq 0$

若因式為 $x - 2$ ，則 $8 - 4 - 6 + 2 = 0$ ，故 $x - 2$ 為 $x^3 - x^2 - 3x + 2$ 的因式

因此 $a = -2$

$$x^3 - x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x^2 + bx + c)$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 1 = x^2 + bx + c$$

故 $b = 1$ 且 $c = -1$

得到 $a - b + c = -2 - 1 + (-1) = -4$ ，故選(A)

108-01-11

Statement

若 $2^x - 2^{-x} = 2$ ，則 $x = ?$

(A) $\log_2(1 + \sqrt{2})$

(B) $\log_2(2 + \sqrt{2})$

(C) $\log_2(1 + 2\sqrt{2})$

(D) $\log_2(2 + 2\sqrt{2})$

(E) $\log_2(3 + 2\sqrt{2})$

Solution

$$2^x - 2^{-x} = 2$$

$$\Rightarrow 2^{2x} - 1 = 2^{1+x}$$

令 $t = 2^x$ ，則

$$\Rightarrow t^2 - 1 = 2t$$

$$\Rightarrow t^2 - 2t - 1 = 0$$

利用公式解，得到 $t = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

考慮到 $\sqrt{2} > 1$ ，因此 $1 - \sqrt{2} < 0$ 不在 t 的值域內，故不合。

還原 t 得到 $\log_2(1 + \sqrt{2})$ ，故選 (A)

108-01-12

Statement

若 $(\log \frac{x}{a})(\log \frac{x}{3}) = 2$ 之兩根乘積為 61，則 $a = ?$

(A) $\frac{3}{61}$

(B) $\frac{4}{61}$

(C) $\frac{61}{4}$

(D) $\frac{61}{3}$

(E) $\frac{61}{2}$

Solution

$$(\log \frac{x}{a})(\log \frac{x}{3}) = 2$$

$$\Rightarrow (\log x - \log a)(\log x - \log 3) = 2$$

$$\Rightarrow (\log x)^2 - (\log 3 + \log a)(\log x) + \log 3 \log a = 2$$

$$\Rightarrow (\log x)^2 - (\log 3a)(\log x) + \log 3 \log a - 2 = 0$$

設 α, β 為式子的兩根，利用根與係數，得到 $\log \alpha + \log \beta = \log 3a$

因此 $\log \alpha \beta = \log 3a = \log 61$

故 $a = \frac{61}{3}$ ，故選 (D)

108-01-13

Statement

設 $b > 0$ 。若兩直線 $L_1 : 3x - 4y + 2 = 0$ 與 $L_2 : 8x + ay + b = 0$ 相互垂直，且點 $(4, -2)$ 到直線 L_2 的距離為3，則 $a - b = ?$

- (A) -6
- (B) -4
- (C) -2
- (D) 2
- (E) 4

Solution

$$L_1 : 3x - 4y + 2 = 0 \Rightarrow 6x - 8y + 4 = 0$$

已知 $L_1 \perp L_2$ ，因此可知 $L_2 = 8x + 6y + b = 0$ ，故 $a = 6$

利用點到直線公式， $\frac{|8 \cdot 4 + 6 \cdot (-2) + b|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = 3$ ，得到 $b = 10$ 或 $b = -50$ (不合)

因此 $a - b = 6 - 10 = -4$ ，故選(B)

108-01-14

Statement

點 $P(1, -6)$ 到曲線 $\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 10$ 的最短距離為何？

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

Solution

從式子可以看出，這是一個橢圓曲線，有兩焦點 $(4, 0)$ 與 $(-2, 0)$ ，且長軸平行 x 軸

因此可知中心為 $(\frac{4 + (-2)}{2}, \frac{0 + 0}{2}) = (1, 0)$ ，且 $c = 3$

又因為 $\overline{FP_1} + \overline{FP_2} = 2a$ ，可知 $a = 5$ ， $b = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

因此橢圓的短軸頂點為 $(1, 4)$ 與 $(1, -4)$ ， $(1, -6)$ 距離橢圓的距離為2，故選(B)

Statement

點 $P(0, 2)$ 到曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 的最短距離為何？

(A) 1

(B) $\sqrt{2}$

(C) $\sqrt{3}$

(D) 2

(E) $\sqrt{5}$

Solution

令 $x = \sqrt{y^2 + 1}$ ，則

$$d = \sqrt{(\sqrt{y^2 + 1})^2 + (y - 2)^2}$$

$$= \sqrt{y^2 + 1 + y^2 - 4y + 4}$$

$$= \sqrt{2y^2 - 4y + 5}$$

$$= \sqrt{2(y - 1)^2 + 3}$$

當 $y = 1$ 時有最小值 $\sqrt{3}$ ，故選(C)

Statement

下列何者正確？

(A) $0 < \theta < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos \theta < \sin \theta$

(B) $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \theta < \sin \theta$

(C) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow \sin \theta < \cos \theta$

(D) $\frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos \theta < \sin \theta$

(E) $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi \Rightarrow \tan \theta < \sin \theta$

Solution

已知當 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，則 $\tan \theta > \sin \theta$

那麼當 $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ 時，則 $\tan \theta < \sin \theta$ ，故選(E)

108-01-17

Statement

設多項式 $f(x)$ 除以 $x+1$ 、 x^2-3x+1 的餘式分別為 4 、 $2x+11$ 。若 $f(x)$ 除以 $(x+1)(x^2-3x+1)$ 的餘式為 ax^2+bx+c ，則 $a+b+c=?$

(A) -14

(B) -13

(C) 0

(D) 13

(E) 14

Solution

$$\text{令 } f(x) = g(x)(x+1) + 4$$

$$= h(x)(x^2-3x+1) + 2x+11$$

$$= p(x)(x+1)(x^2-3x+1) + ax^2+bx+c$$

$$\text{令 } x = -1, \text{ 得 } a - b + c = 4$$

$$\text{令 } x^2 = (3x-1), \text{ 則 } 2x+11 = 3ax+bx+(c-a)$$

$$\text{因此我們可以解聯立方程組 } \begin{cases} 3a+b=2 \\ c-a=11 \\ a-b+c=4 \end{cases}, \text{ 得到 } (a, b, c) = (-1, 5, 10)$$

$$\text{因此 } a+b+c = -1+5+10 = 14, \text{ 故選 } (E)$$

108-01-18

Statement

不等式 $\log_2 x + 6 \log_x 2 < 5$ 之解為何？

(A) $2 < x < 3$

(B) $1 < x < 4$

(C) $x < 1$ 或 $2 < x < 3$

(D) $x < 1$ 或 $4 < x < 8$

(E) $x > 8$

(F) $0 < x < 1$ 或 $4 < x < 8$

Solution

$$\log_2 x + 6 \log_x 2 < 5$$

$$\Rightarrow \log_2 x + 6 \frac{\log_2 2}{\log_2 x} < 5$$

$$\Rightarrow \log_2 x + \frac{6}{\log_2 x} < 5$$

$$\text{令 } t = \log_2 x$$

$$t + \frac{6}{t} < 5$$

$$\Rightarrow t + \frac{6}{t} - 5 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{t^2 - 5t + 6}{t} < 0$$

考慮兩種情況

$$\begin{cases} t^2 - 5t + 6 > 0 \\ t < 0 \end{cases} \Rightarrow t \in (-\infty, 0)$$

$$\begin{cases} t^2 - 5t + 6 < 0 \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow t \in (2, 3)$$

還原 t 與考慮定義域，得到 $0 < x < 1$ 或 $4 < x < 8$ ，故選(F)

108-01-19

Statement

若 x, y, z 為實數，且 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$ ，則 $x^2 + 2y^2 + z^2$ 的最小值為何？

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) 1

(D) $\frac{4}{3}$

(E) $\frac{5}{3}$

Solution

$$\text{令 } t = \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$$

$$\text{則 } \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t - 1 \\ z = 3t + 2 \end{cases}$$

$$\text{因此 } x^2 + 2y^2 + z^2 = (2t + 1)^2 + 2(-t - 1)^2 + (3t + 2)^2 = 15t^2 + 20t + 7$$

$$\text{利用配方法，可以得到 } 15\left(t + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3}$$

當 $t = \frac{-2}{3}$ ，則有最小值 $\frac{1}{3}$

108-01-20

Statement

若點 P 介於 $A(1, 1)$ 、 $B(-5, 4)$ 之間且 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ ，則點 P 到直線 $4x - 3y = 1$ 之距離為何？

(A) 4

(B) $\frac{21}{5}$

(C) $\frac{22}{5}$

(D) $\frac{24}{5}$

(E) 5

Solution

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1 \Rightarrow \overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 1$$

利用內分點公式，可以知道 $(\frac{1 \times 1 + (-5) \times 2}{1 + 2}, \frac{1 \times 1 + 4 \times 2}{1 + 2}) = (-3, 3)$

利用點到直線距離公式， $\frac{|4 \times (-3) - 3 \times 3 - 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{22}{5}$ ，故選(C)

108年第2次北科入學數學會考

108-02-01

Statement

求不等式 $x^2 - (\sqrt{x-2})^2 < 4x - 2$ 的實數解。

(A) $-1 < x < 4$

(B) $0 < x < 4$

(C) $1 < x < 4$

(D) $2 \leq x < 4$

(E) $x < 1$ 或 $x > 4$

Solution

$$x^2 - (\sqrt{x-2})^2 < 4x - 2$$

$$\Rightarrow x^2 - (x-2) < 4x - 2$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 2 < 4x - 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 < 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x-1) < 0$$

可以得到 $1 < x < 4$

考慮定義域，根號內的數字必須是非負整數，因此 $x \geq 2$

取交集得到 $2 \leq x < 4$ ，故選(D)

108-02-02

Statement

設 $f(x)$ 除以 $(x-2)$ 的商為 $Q(x)$ ，餘數為3，且 $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的餘數為1，則 $Q(1) = ?$

(A) -2

(B) -1

(C) 1

(D) 2

(E) 3

Solution

$$f(x) = (x - 2)Q(x) + 3 = (x - 1)P(x) + 1$$

$$\text{代入 } f(1) = -1Q(1) = -2$$

得到 $Q(1) = 2$ ，故選(D)

108-02-03

Statement

設 $\frac{1}{\alpha}$ 和 $\frac{1}{\beta}$ 為方程式 $x^2 - 2x + 4$ 的兩根，則 $\alpha + \beta = ?$

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) 2

(D) 4

(E) 8

Solution

由根與係數可以知道

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -\frac{-2}{1} = 2$$

$$\frac{1}{\alpha\beta} = 4, \text{ 因此 } \alpha + \beta = \frac{1}{2}, \text{ 故選(B)}$$

108-02-04

Statement

$$1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \dots + (1 + 2 + 3 + \dots + 10) = ?$$

(A) 180

(B) 210

(C) 220

(D) 240

(E) 250

Solution

$$\begin{aligned} & 1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \dots + (1 + 2 + 3 + \dots + 10) \\ &= 10 \times 1 + 9 \times 2 + 8 \times 3 + \dots + 1 \times 10 \\ &= \sum_{x=1}^{10} n(11 - n) = \sum_{x=1}^{10} 11n - n^2 = \sum_{x=1}^{10} 11n - \sum_{x=1}^{10} n^2 \\ &= 11 \cdot \frac{10 \times 11}{2} - \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 605 - 385 = 220, \text{ 故選}(C) \end{aligned}$$

108-02-05

Statement

設 $\frac{-26x + 47}{(x^2 + 4)(2x - 1)^2} = \frac{ax + b}{x^2 + 4} + \frac{c}{2x - 1} + \frac{d}{(2x - 1)^2}$ ，則 $d = ?$

- (A) -8
- (B) -4
- (C) 2
- (D) 4
- (E) 8

Solution

$$-26x + 47 = (ax + b)(2x - 1)^2 + c(x^2 + 4)(2x - 1) + d(x^2 + 4)$$

代入 $x = \frac{1}{2}$ ，則 $34 = \frac{17}{4}d$

$d = 8$ ，故選(D)

108-02-06

Statement

設 $\cos 2\theta = \sin \theta$ ， $0 \leq \theta \leq \pi$ ，則 $\tan^2 \theta = ?$

- (A) $\frac{1}{3}$
- (B) $\frac{1}{2}$
- (C) 2
- (D) 4
- (E) 8

Solution

$$\cos 2\theta = \sin \theta$$

$$\Rightarrow 1 - 2\sin^2 \theta = \sin \theta$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 \theta + \sin \theta - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2\sin \theta - 1)(\sin \theta + 1) = 0$$

$$\text{得} \sin \theta = -1 (\text{不合}) \text{ 且 } \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{得} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 因此 } \tan^2 \theta = \frac{1}{3}, \text{ 故選(A)}$$

108-02-07

Statement

設 $\triangle ABC$ 中， $\tan A = \frac{4}{3}$ ， $\cos B = \frac{12}{13}$ ，則 $\cos C = ?$

(A) $-\frac{56}{65}$

(B) $-\frac{36}{65}$

(C) $-\frac{16}{65}$

(D) $\frac{16}{65}$

(E) $\frac{56}{65}$

Solution

$$\tan A = \frac{4}{3}, \text{ 得到 } \sin A = \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{4}{5}, \text{ 且 } \cos A = \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos B = \frac{12}{13}, \text{ 得到 } \sin B = \frac{\sqrt{13^2-12^2}}{13} = \frac{5}{13}$$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{63}{65}$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B = \frac{16}{65}$$

$$\cos C = \cos(180^\circ - (A+B)) = \cos 180^\circ \cos(A+B) + \sin 180^\circ \sin(A+B) = -\frac{16}{65}, \text{ 故選(C)}$$

108-02-08

Statement

$$\sin 150^\circ - \cos 240^\circ - \tan 315^\circ = ?$$

- (A) -2
- (B) -1
- (C) 0
- (D) 1
- (E) 2

Solution

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 315^\circ = -\tan 45^\circ = -1$$

$$\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) - (-1) = 1 + 1 = 2, \text{ 故選}(E)$$

108-02-09

Statement

方程式 $100 \cdot x^{3 \log x} = x^5$ 之所有實根的立方和為何？

- (A) 1000
- (B) 1001
- (C) 1010
- (D) 1100
- (E) 1110

Solution

$$100 \cdot x^{3 \log x} = x^5$$

$$\Rightarrow 3 \log x \log x + 2 = 5 \log x$$

$$\Rightarrow 3(\log x)^2 - 5 \log x + 2 = 0$$

$$\text{令 } t = \log x, \text{ 則 } 3t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 1)(3t - 2) = 0$$

$$\text{得到 } t = 1 \text{ 或 } t = \frac{2}{3}$$

$$\text{還原 } t, \text{ 得到 } x = 10 \text{ 或 } x = \sqrt[3]{100}$$

$$\text{則所有實根的立方和為 } 10^3 + (\sqrt[3]{100})^3 = 1000 + 100 = 1100, \text{ 故選}(D)$$

108-02-10

Statement

求不等式 $\frac{3\log_3 x + 5}{\log_3 x + 1} \leq 1$ 的解。

(A) $\frac{1}{27} < x < 3$

(B) $\frac{1}{27} \leq x < 3$

(C) $3 < x < 9$

(D) $\frac{1}{27} \leq x < 9$

(E) $\frac{1}{27} < x < 9$

Solution

$$\frac{3\log_3 x + 5}{\log_3 x + 1} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{2\log_3 x + 6}{\log_3 x - 1} \leq 0, x \in (0, 3) \cup (3, \infty)$$

考慮以下兩種情況

$$\begin{cases} 2\log_3 x + 6 \leq 0 \\ \log_3 x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\begin{cases} 2\log_3 x + 6 \geq 0 \\ \log_3 x - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [\frac{1}{27}, 3)$$

兩者取聯集，得到 $x \in [\frac{1}{27}, 3)$ ，故選(B)

108-02-11

Statement

已知橢圓 $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ 短軸的兩頂點為另一橢圓 Γ 的焦點，且 Γ 過點 $(7, 1)$ ，則 Γ 長軸長為何？

(A) 6

(B) 8

(C) 10

(D) 12

(E) 14

Solution

從方程式可知，橢圓的長軸平行於 y 軸，因此短軸平行於 x 軸，且中心為 $(1, 1)$

又可知 $b = \sqrt{16} = 4$ 且 $a = \sqrt{25} = 5$

故短軸頂點為 $(-3, 1)$ 或 $(5, 1)$ ，為另一橢圓 Γ 之焦點

又已知 $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$

$$\sqrt{(7 - (-3))^2 + (1 - 1)^2} + \sqrt{(7 - 5)^2 + (1 - 1)^2} = 10 + 2 = 12 = 2a$$

因此 Γ 的長軸長為12，故選(D)

108-02-12

Statement

若兩圓 $C_1 : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$ 與 $C_2 : (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = k$ 相切，則 k 可能為何？

- (A) 9
- (B) 25
- (C) 49
- (D) 81**
- (E) 121

Solution

已知 C_1 的中心 O_1 為 $(-1, 2)$ ，且 C_2 的中心 O_2 為 $(3, -1)$

$$\text{因此 } \overline{O_1O_2} = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (2 - (-1))^2} = 5$$

又已知 C_1 的半徑為4，因此 C_2 的半徑為1或9才能使兩圓相切，故 $k = 1$ 或 $k = 81$ ，故選(D)

108-02-13

Statement

設 $2 \cdot 9^{x-1} + 5 \cdot 3^{x+1} + 2 = 0$ 的兩根為 α 和 β ，則 $\alpha + \beta = ?$

- (A) 2**
- (B) 3
- (C) 4
- (D) 5
- (E) 6

Solution

$$2 \cdot 9^{x-1} + 5 \cdot 3^{x+1} + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{9} \cdot 9^x + 15 \cdot 3^x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{9} \cdot 3^{2x} + 15 \cdot 3^x + 2 = 0$$

$$\text{令 } t = 3^x, \text{ 則 } \frac{2}{9}t^2 + 15t + 2 = 0 \Rightarrow 2t^2 + 135t + 18 = 0$$

$$\text{利用根與係數, 可知 } 3^\alpha \cdot 3^\beta = 3^{\alpha+\beta} = \frac{18}{2} = 9$$

故 $\alpha + \beta = 2$, 故選(A)

108-02-14

Statement

設拋物線 $y = ax^2 + bx + c$ 之圖形如下所示, 則下列何者正確?

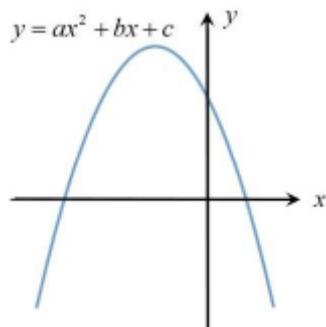
(A) $b^2 - 4ac \leq 0$

(B) $c < 0$

(C) $ab < 0$

(D) 對稱軸 $x = \frac{b}{2a}$

(E) $b < 0$



Solution

考慮拋物線的頂點為 $(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a})$

又已知頂點 $\frac{-b}{2a} < 0$, 又已知 $a < 0$ (開口向下), 故 $b < 0$, 故選(E)

108-02-15

Statement

已知 $\triangle ABC$ 中， $\vec{AB} = \langle -8, 6 \rangle$ ， $\vec{AC} = \langle -3, 4 \rangle$ ，則 $\triangle ABC$ 之面積為何？

(A) 6

(B) $\frac{13}{2}$

(C) 7

(D) $\frac{15}{2}$

(E) 8

Solution

$$\text{已知 } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-8) \cdot (-3) + 6 \cdot 4 = 48$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-8)^2 + (6)^2} = 10$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

$$\text{又 } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| |\vec{AC}| \cos \theta$$

$$\text{因此 } \cos \theta = \frac{48}{50} = \frac{24}{25}, \text{ 得 } \sin \theta = \frac{7}{25}$$

$$\text{可知 } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 10 \times 5 \times \frac{7}{25} = 7, \text{ 故選(C)}$$

108-02-16

Statement

設 $\vec{a} = \langle 3, 1 \rangle$ ， $\vec{b} = \langle x, y \rangle$ 為平面上兩向量，且 $x^2 + y^2 = 20$ ，則 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的最大值為何？

(A) $5\sqrt{2}$

(B) $10\sqrt{2}$

(C) $15\sqrt{2}$

(D) $20\sqrt{2}$

(E) $25\sqrt{2}$

Solution

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3x + y$$

利用柯西不等式求最大值，則

$$(3^2 + 1^2)(x^2 + y^2) \geq (3x + y)^2$$

又已知 $x^2 + y^2 = 20$ ，因此 $200 \geq (3x + y)^2$ ，故 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的最大值為 $10\sqrt{2}$ ，故選(B)

Statement

若 a 、 b 皆為實數，且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - 3}{x^2 - 1} = b$ ，則 $a + b = ?$

- (A) 4
 (B) 5
 (C) 6
 (D) 7
 (E) 8

Solution

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - 3}{x^2 - 1} = b$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - 3}{(x+1)(x-1)} = b$$

可知分母必須要能被 $x - 1$ 整除，極限才會存在。

故 $1 + a - 3 = 0$ 得到 $a = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)(x-1)} = b$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3)}{(x+1)} = \frac{4}{2} = 2, \text{ 因此 } b = 2$$

故 $a + b = 2 + 2 = 4$ ，故選(A)

Statement

設 a 為實數， $f(x) = 2x + a$ ， $g(x) = 3x + 1$ 。若 $f \circ g = g \circ f$ ，則 $a = ?$

- (A) $\frac{1}{4}$
 (B) $\frac{1}{3}$
 (C) $\frac{1}{2}$
 (D) 1
 (E) 2

Solution

$$f \circ g = f(g(x)) = 2(3x + 1) + a = 6x + 2 + a$$

$$g \circ f = g(f(x)) = 3(2x + a) + 1 = 6x + 3a + 1$$

又 $f \circ g = g \circ f$ ，得到 $2 + a = 3a + 1$ ，因此 $a = \frac{1}{2}$ ，故選(C)

108-02-19

Statement

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2h} - 1}{h} = ?$$

(A) -2

(B) -1

(C) 1

(D) 2

(E) 3

Solution

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2h} - 1}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 2h - 1}{h(\sqrt{1-2h} + 1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h(\sqrt{1-2h} + 1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{\sqrt{1-2h} + 1} = \frac{-2}{2} = -1, \text{ 故選(B)}$$

108-02-20

Statement

下列何者為函數 $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{2x-x^2-1}}$ 的定義域？

(A) $[0, 1)$

(B) $(1, 2]$

(C) $[0, 2]$

(D) $(2, \infty)$

(E) $[0, 1) \cup (1, 2]$

Solution

分子為奇次方根，因此定義域為 $x \in \mathbb{R}$

分母 $\sqrt{2x - x^2} - 1 \neq 0$ ，因此 $\sqrt{2x - x^2} \neq 1$ ，故 $2x - x^2 \neq 1$ ， $-x^2 + 2x - 1 \neq 0$ ，因此 $x \neq 1$

又考慮根號內必須要是非負整數，因此 $2x - x^2 \geq 0$ ，得到 $0 \leq x \leq 2$

對三者取交集，得到 $[0, 1) \cup (1, 2]$ ，故選(E)